PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 7. 1. April 1910. Redaktionsschluß für No. 8 am 11. April 1910. 11. Jahrgang.

INHALT:

Originalmitteilungen:

J. Elster u. H. Geitel, Über gefärbte Hydride der Alkalimetalle und ihre photoelektrische Empfindlichkeit. S. 257.

H. W. Schmidt, Beitrag zur Frage über den Durchgang der β-Strahlen durch Materie. S. 262.

K. Bergwitz, Die chemische Zerlegung des Wassers durch die α-Strahlen des Poloniums. S. 273.

J. Elster u. H. Geitel, Beiträge zur Kenntnis der Radioaktivität des Kaliums. S. 275.

A. Gockel, Luftelektrische Beobachtungen bei einer Ballonfahrt. S. 280.

M. Wien, Über einen Einfluß des Metalls der Funkenstrecke auf die Frequenz elektrischer Schwingungen. S. 282.

V. Varičak, Die Relativtheorie und die Lobatschefskijsche Geometrie. S. 287.

M. Planck, Gleichförmige Rotation und Lorentzkontraktion. S. 294.

E. Wiechert u. L. Geiger, Bestimmung des Weges der Erdbebenwellen im Erdinnern. S. 294.

W. Krebs, Das Adriatische Meer und sein Einfluß auf das Klima seiner Küsten. S. 311.

M. Wien, Nachtrag zu meinem Aufsatz: Über eine neue Form der Stoßerregung elektrischer Schwingungen. S. 311.

Besprechungen:

O. Benischke, Die Transformatoren. S. 312.

G. Kowalewski, Einführung in die Infinitesimalrechnung. S. 312.

Personalien. S. 312.

Gesuche. S. 312.

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Über gefärbte Hydride der Alkalimetalle und ihre photoelektrische Empfindlichkeit.

Von J. Elster und H. Geitel.

Bei der Herstellung der photoelektrischen Zellen mit Kathoden aus Alkalimetall war es uns vielfach aufgefallen, daß ihre Empfindlichkeit, d. h. die Stärke des photoelektrischen Stromes, den sie bei gleicher Belichtung und demselben beschleunigenden Potentiale gaben, in weiten Grenzen ungleich war, auch wenn wir die Größe und Form der Zellen, sowie ihren Inhalt an Alkalimetall und Gasresten möglichst übereinstimmend gemacht hatten. Sehr deutlich zeigte sich diese Verschiedenheit auch dann, wenn kein beschleunigendes Potential angelegt war, der photoelektrische Strom also nur durch diejenigen Elektronen vermittelt wurde, die von der belichteten Kathode aus einzig infolge ihrer Eigengeschwindigkeit und frei von richtenden Kräften die Anode erreichten.

Am nächsten liegt offenbar der Gedanke, ein geringeres Maß von Lichtempfindlichkeit ganz allgemein auf unvollkommene Oberflächenreinheit der Kathode zurückzuführen. Zweifellos sind Verunreinigungen durch Oxydschichten, wie sie sehr leicht bei nicht ganz vorsichtiger Herstellung der Zellen vorkommen, von nachteiligstem Einfluß auf ihre Lichtempfindlichkeit.

Aber es lassen sich bei genügender Sorgfalt sehr reine Flächen — besonders an der flüssigen KNa-Legierung — herstellen, auf denen selbst ein Bündel auffallender Sonnenstrahlen durch keine seitliche Zerstreuung bemerkbar wird. Dabei braucht die Empfindlichkeit dieser reinsten Oberflächen nicht höher zu sein, als die von solchen, auf denen das Auge ohne weiteres eine zarte Trübung oder selbst schwimmende Fremdkörperchen entdeckt. Ja in manchen Fällen beobachteten wir sogar einen günstigen Einfluß der Oberflächentrübung auf die Empfindlichkeit, wenn nämlich für kurze Zeit eine leuchtende Entladung durch die Zelle gegangen war und eine gewisse Abstumpfung des metallischen Glanzes der Kathode bewirkt hatte. Indem wir die Bedingungen dieser Erscheinung näher untersuchten, sind wir zu einigen neuen Ergebnissen gelangt, über die wir im folgenden berichten möchten.

Zuerst vermuteten wir, daß beim Durchgang der leuchtenden Entladung Spuren des Anodenmaterials (Platin oder Aluminium) zerstäubt und von dem Alkalimetall aufgenommen wären. Eine hierdurch bewirkte Vergrößerung des Absorptionsvermögens für das einfallende Licht konnte die Ursache der „Sensibilisierung" der Zelle sein. Direkte Versuche indessen, durch Zusatz von Spuren fremder Metalle die Alkalikathoden empfindlicher zu machen, führten zu keinem eindeutigen Resultate. Wir verwandten dazu kleine Mengen von Quecksilber oder Blei, die wir mit Kalium legierten, erhitzten dasselbe Metall oder seine Natriumlegierung bei Gegenwart von Silber und Palladium im Vakuum oder stellten schließlich ebenfalls im Vakuum die Alkalimetallflächen längere Zeit einem hellgelbglühenden Platindrahte gegenüber. Nur bei dem letzten Verfahren schien eine Vergrößerung der Empfindlichkeit erreich-

bar, doch war es nicht zu entscheiden, ob das zerstäubte Platin oder die aus dem Drahte entwichenen Gase die wesentliche Rolle spielten.

Nun ist es nach Versuchen von K. Mey[1]) bekannt, daß unter der Vermittelung des Glimmstromes bei der leuchtenden Entladung die Gasreste der Zelle mit dem Alkalimetall chemisch reagieren. In der Regel ist nun das Vakuum der Zellen über Wasserstoff hergestellt, ja es dürfte die Gegenwart dieses Gases überhaupt kaum ganz zu vermeiden sein. Da nämlich das Alkalimetall vor dem Einbringen in das Vakuum mit Luft in Berührung kommt, so überzieht es sich mit einer Schicht von Hydroxyd, aus der beim Schmelzen des Metalles Ströme von Wasserstoff entweichen. Es schien uns daher in erster Linie die Einwirkung des Wasserstoffs auf das Alkalimetall als Ursache der Empfindlichkeitsdifferenzen in Betracht zu kommen.

In der Tat wissen wir nach den Untersuchungen von H. Moissan, daß sowohl das Kalium wie das Natrium unter Atmosphärendruck sich mit dem Wasserstoff zu kristallisierten durchsichtigen Hydriden verbinden, wenn man die Temperatur um 350^0 hält, bei stärkerer Erhitzung tritt Dissoziation ein[2]). Wir haben diese Versuche in kleinem Maßstabe unter vermindertem Drucke leicht wiederholen können und sie zugleich auf die beiden anderen Alkalimetalle Rubidium und Cäsium ausgedehnt. Unser Ziel war die Feststellung der photoelektrischen Eigenschaften dieser Hydride in unverändertem Zustande wie auch nach Einwirkung des Glimmstromes und anderer Formen der elektrischen Entladung. Der hierzu benutzte Apparat hatte folgende Einrichtung (Fig. 1). Eine Glaskugel *K* von etwa 40 mm

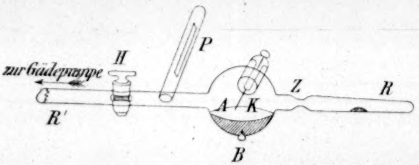


Fig. 1.

Durchmesser enthält zwei einander gegenüberstehende Elektroden, die eine *A* ragt in den Innenraum etwa 35 mm vor, während die andere, *B*, nur eben die Glaswand durchsetzt. Um *B* als Mittelpunkt ist durch Eingießen einer Versilberungsflüssigkeit in die Kugel eine Silberbelegung in Form einer Kalotte hergestellt.

Durch wiederholtes Ausspülen der Kugel mit destilliertem Wasser und reinem Alkohol wird das Innere von Resten der Silberlösung befreit und hierauf der metallische Belag im trocknen Leuchtgasstrome erhitzt, um Spuren von Silberoxyd und Wasser zu entfernen. In das Ansatzrohr *R* wird ein linsengroßes Stück des Alkalimetalls eingeführt, das offene Ende schmilzt man vor der Gebläseflamme zu. Bei *Z* ist das Rohr etwas eingezogen, damit es leicht durch Abschmelzen von der Kugel getrennt werden kann. Das gegenüberliegende Rohr *R'* dient zum Anschluß an eine Gädepumpe, *H* ist ein Hahn, durch den die Verbindung hergestellt wird. In das Seitenrohr *P* werden einige Streifen Palladiumbleches eingeschoben, das als Kathode bei der Wasserzersetzung sich mit Wasserstoff beladen hat; auch *P* wird nach dem Einführen des Palladiums vor der Lampe geschlossen. Durch einen Vorversuch bestimmten wir die Menge des von dem Palladium beim Erhitzen entwickelten Wasserstoffs zu 20 cm^3, das Volumen des Röhrensystems einschließlich der Kugel bis zum Hahn *H* betrug nahe 100 cm^3, so daß nach Erhitzen des Palladiums in dem evakuierten Apparate bei geschlossenem Hahne der Druck des freien Wasserstoffs rund gleich ein Fünftel Atmosphäre wurde.

Im einzelnen verfuhren wir nun folgendermaßen: Nachdem die Röhren *R* und *P* mit Alkalimetall und Palladium beschickt und geschlossen waren, stellten wir zunächst in dem Apparate bei geöffnetem Hahne *H* das Vakuum her, soweit dies die andauernde Wasserstoffentwicklung aus dem feuchten Überzuge des Alkalimetalls zuließ. Nach einigen Stunden unterstützten wir den Prozeß der Zersetzung der Hydroxydrinde durch gelindes Erwärmen, während die Pumpe dauernd im Betriebe blieb. Sobald die Reaktion beendet ist, nimmt die Verdünnung des Gases sehr schnell zu, wie man an einem zugleich an die Pumpe angeschlossenen Geißlerrohr leicht verfolgen kann. Zugleich destilliert in dem hohen Vakuum das Alkalimetall aus dem erhitzten Rohre *R* in die Kugel hinüber, die sich dabei innen mit einer spiegelnden Haut bekleidet. Ist alles Metall hinübergetrieben, so wird das Rohr *R* durch Abschmelzen entfernt. Nun schlossen wir den Hahn *H* und füllten durch Erhitzen des Palladiumbleches den Apparat mit Wasserstoffgas. Die Kugel wurde nun mit einer Hülle von Asbest umgeben und über einer Bunsenflamme erhitzt, während die Silberkalotte (nach Drehung des Rohres *R R'* in einem Schliffe) nach oben gekehrt war. Nach Verlauf mehrerer Stunden zeigte sich meist, daß das Alkali-

1) K. Mey, Ann. d. Phys. (4) **11**, 136, 1903.
2) H. Moissan, C. R. **134**, 18 u. 71, 1902.

metall völlig verschwunden und an seine Stelle ein weißer Belag, z. T. bestehend aus glänzenden Nadeln und Fäden, getreten war, der die Silberschicht und den Platindraht *A* überzog. Die Glasseite der Kugel, die nach unten während des Erhitzens gewandt war, blieb frei von diesem Überzuge und daher völlig durchsichtig.

Die entstandene weiße Substanz war offenbar das von Moissan dargestellte und bebeschriebene Hydrid des Kaliums bzw. Natriums, analoge Verbindungen erhielten wir auch beim Rubidium und Cäsium. Das letztere Metall machte uns allerdings erhebliche Schwierigkeiten in der Behandlung, da es nur sehr schwer von dem Paraffinöl zu befreien ist, unter dem es von den Fabrikanten versandt wird. Cäsium ist schon bei 26,5° C flüssig und so kommt es, daß das Metall unter dem Öl sich bei hoher Zimmertemperatur leicht in eine schaumige Masse von Einzeltropfen auflöst, die nach dem Erstarren Öleinschlüsse enthält. Durch wiederholtes Auswaschen mit Benzin suchten wir das schwere Öl zu entfernen, brachten dann unter Benzin die Metallfragmente auf ein kleines Schiffchen aus Messingdrahtgeflecht, auf dem wir sie, noch feucht von Benzin, in das Röhrchen *R* einschoben, das dann sofort verschlossen wurde. Die Benzindämpfe sogen wir vor der Anschließung des Apparates an die Gädepumpe durch eine Wasserstrahlpumpe ab. Man muß sehr schnell operieren, da Cäsium im Kontakt mit der Luft sich entzündet und selbst unter dem Schutze von Benzin oxydiert wird. Aber auch bei aller Vorsicht bleiben leicht Spuren von Paraffinöl bei dem Metalle, die bei der Destillation Kohle abscheiden und so die Kugel und den Cäsiumbelag verunreinigen. Das beste Resultat erzielten wir dadurch, daß wir das wie beschrieben vorbereitete Metall in einer besonderen Operation im Vakuum in ein Glasröhrchen hineindestillierten, dieses öffneten und mit dem Metallinhalt in das Rohr *R* einführten. Erst dann wurde das Metall im Vakuum in die Kugel hinübergetrieben, sein Silberglanz blieb jetzt abgesehen von einem leichten Stich ins Gelbliche erhalten.

In der Regel gelang es bei einmaligem Erhitzen der Kugel, jede Spur von Metall zum Verschwinden zu bringen, waren hier und da noch glänzende Flächen vorhanden, so mußte der Prozeß wiederholt werden. Die entstandenen Produkte sehen einander sehr ähnlich, die deutlichsten Anzeichen von Kristallisation beobachteten wir bei den Hydriden des Kaliums und Rubidiums.

Zur Untersuchung ihres photoelektrischen Verhaltens wurde der Silberbelag mit der darauf niedergeschlagenen Schicht von Hydrid vermittels der Elektrode *B* an den negativen Pol einer Akkumulatorenbatterie von 40—80 Volt angeschlossen, von *A* führte ein Draht über ein d'Arsonvalsches Galvanometer von 10^{-9} Amp. Empfindlichkeit zu dem positiven Pole der Batterie. Im Gegensatz zu den blanken Alkalimetallen konnten wir an den so bereiteten Hydriden keinen photoelektrischen Effekt nachweisen, wenn wir sie mit starkem Licht (60kerzige Nernstlampe in 5 cm Entfernung) beleuchteten. Nach Öffnung des Hahnes *H* wurde der noch im Apparate vorhandene Wasserstoff entfernt, aber bei keinem, auch sehr geringem, Gasdruck ließ sich eine Elektronenemission bei Einwirkung sichtbaren Lichtes an den Hydriden wahrnehmen, selbst nicht für beschleunigende Kräfte bis 620 Volt. Ultraviolettes Licht haben wir nicht angewandt, da es uns ja nur darauf ankam, einen etwaigen Einfluß der Hydride auf das photoelektrische Verhalten der Alkalimetalle im sichtbaren Bereiche des Spektrums festzustellen.

Nun hat bekanntlich Goldstein[1]) gefunden, daß die Salze der Alkalimetalle, speziell die Halogenverbindungen, unter der Einwirkung von Kathodenstrahlen charakteristische Färbungen annehmen. Wir konnten schon vor längerer Zeit zeigen, daß diese gefärbten Substanzen gerade wie die freien Alkalimetalle im sichtbaren Lichte stark photoelektrisch empfindlich sind[2]) und hatten damals die inzwischen unabhängig von anderer Seite bestätigte[3]) Auffassung ausgesprochen, daß die Färbungen durch das in der Salzmasse gelöste freie Alkalimetall[4]) hervorgerufen würden.

Es lag nahe, das gleiche Verhalten gegenüber den Kathodenstrahlen auch bei den Hydriden vorauszusetzen. Zur Ausführung des Versuches wurde der Apparat möglichst leer gepumpt, die Elektrode *B* zur Erde abgeleitet und die Glaswand der Zelle gegenüber der Silberbelegung mit dem einen isolierten Poldraht eines kleinen Teslatransformators berührt, dessen anderer Pol geerdet war. Bei passender Regulierung des Betriebsstromes erreicht man leicht, daß von der berührten Stelle der Glaswand aus ein Bündel Kathodenstrahlen gegen das auf der Silberschicht abgelagerte Hydrid trifft, ohne daß die Entladung durch die Elektrode *A* in den Gasraum übergeht. Wir vermieden auf diese Weise die Zerstäubung

1) E. Goldstein, Wied. Ann. **54**, 371, 1895.
2) J. Elster u. H. Geitel, Wied. Ann. **59**, 487, 1896.
3) H. Siedentopf, diese Zeitschr. **6**, 863, 1905 und Verh. d. D. Physik. Ges. **12**, 27, 1910.
4) l. c., S. 496.

des Elektrodendrahtes. Schon nach kurzer Einwirkung der Kathodenstrahlen bildet sich auf dem Kaliumhydrid eine blauviolette Färbung heraus, ähnlich, nur blasser ist sie bei der Rubidiumverbindung, Cäsiumhydrid färbt sich schwach grünlich, indem vielleicht die oben erwähnte gelbliche Oberflächenfarbe störend mitspielt, Natriumhydrid wird bräunlichgelb. In allen Fällen bemerkt man eine Zunahme der Gasdichte während der Einwirkung der Kathodenstrahlen, das entwickelte Gas erweist sich als Wasserstoff, es hat demnach eine Dissoziation stattgefunden. Nach Eintritt der Färbung zeigen sich sämtliche Hydride photoelektrisch wirksam im sichtbaren Lichte. Die genaue Analogie der erhaltenen Farben mit den in gleicher Weise erzeugten der Halogenverbindungen[1]) der Alkalimetalle läßt darauf schließen, daß wir es mit derselben Erscheinung zu tun haben, nämlich mit der Bildung von festen Lösungen der — wohl im kolloiden Zustande befindlichen — Alkalimetalle in der unzersetzten Substanz.

Bei den bislang beschriebenen Versuchen waren wir von den reinen Wasserstoffverbindungen ausgegangen und hatten diese erst nachträglich durch teilweise Reduktion mittels Kathodenstrahlen photoelektrisch empfindlich gemacht. Nun war nach den Erfahrungen Meys vorauszusetzen, daß die Hydride sich ebenfalls bildeten, wenn das freie Alkalimetall in einer Atmosphäre von Wasserstoff der Glimmentladung ausgesetzt würde. Wendete man es dabei in großem Überschusse an, so konnte man erwarten, besonders reiche gefärbte Lösungen zu erzielen.

Das Verfahren war dabei im ganzen nur wenig abzuändern: Die eingeführte Menge an Alkalimetall wurde etwa vervierfacht, die Erhitzung in der Wasserstoffatmosphäre zur Herstellung des Hydrides fiel weg, ebenso die Behandlung mit Kathodenstrahlen. Durch einseitiges Erhitzen der dem Silberbelage gegenüberliegenden Wand der Kugel *K* während der Destillation des Metalls hielten wir diese durchsichtig und schlugen jenes vorzugsweise auf der Silberfläche nieder. Dann wurde, wie früher bei geschlossenem Hahne *H*, der Apparat durch Erwärmen des Palladiumbleches mit Wasserstoff gefüllt. Der Gasdruck ließ sich nach Öffnen des Hahnes zur Pumpe so treffen, daß der Glimmstrom einer Akkumulatorenbatterie von 300—400 Volt, durch einen Widerstand von 3000 Ω eingeleitet, die Zelle passierte. Die mit dem Alkalimetalle überzogene Silberschicht macht man zweckmäßig zur Kathode, da die Entladung dann im Lichte schon bei geringerer Spannung einsetzt.

Es genügen wenige Sekunden der Entladung, um auf dem Kalium eine prachtvoll smalteblaue bis violette Farbe hervorzurufen, manche Partien erscheinen tief schwarzblau. Auch Rubidium färbt sich in derselben Art, nur etwas weniger tief, Natrium wird lederbraun, während Cäsium nur wenig bläulichgrün anläuft[1]). Bei längerer Einwirkung des Glimmstromes treten leicht schmutzige Farbentöne auf, vermutlich infolge der Zerstäubung der Platinelektrode *A* und der Zersetzung der Dämpfe von Kohlenwasserstoffen, die aus dem Hahnfett der Pumpe stammen.

Dieselben Färbungen, die der Glimmstrom den Metallen bei Gegenwart von Wasserstoff erteilt, ruft er auch an den reinen Hydriden hervor. Die sehr großen Mengen von Wasserstoff, die sich dabei entwickeln, zeigen eine weitgehende Zersetzung der Hydride an.

In allen Fällen ist aber zugleich mit der Färbung des Metalls eine beträchtliche Steigerung der Empfindlichkeit (auch gegenüber den größeren Wellenlängen) eingetreten, der photoelektrische Strom ist auf das Drei- bis Vierfache gestiegen, mag man an die Alkalimetallfläche ein beschleunigendes negatives Potential anlegen oder nicht. Um einen genauen Vergleich zu haben, wurde jede Zelle vor und nach der Färbung bis zu der äußersten durch die Gädepumpe erreichbaren Verdünnung ausgepumpt und jedesmal unter derselben Beleuchtung und derselben beschleunigenden Spannung an das Galvanometer angeschlossen. Da unmittelbar nach dem Einleiten des Glimmstromes Reste von statischen Ladungen an der Glaswand verblieben sein konnten, die vielleicht den photoelektrischen Strom beeinflußten, so wurde stets so lange gewartet, bis die Ausschläge des Galvanometers konstant waren. Die folgende Tabelle zeigt den Einfluß der Färbung aufs deutlichste. Allein die Zahlen der Horizontalreihen sind unter sich vergleichbar, da Tage zwischen den Messungen an den verschiedenen Metallen lagen und die

	Empfindlichkeit		Angelegtes Potential (Volt)	Verhältnis d. Empfindlichkeiten
	Vor der Färbung	Nach der Färbung		
Kalium . .	63	220	0,0	3,5
Natrium .	130	425	20,0	3,3
Rubidium	75	330	0,0	4,4
Cäsium . .	100	300	40,0	3,0

1) Wie das durch Kathodenstrahlen gelb gefärbte *NaCl* beim Erhitzen seine Farbe zu Blau wechselt, so verhält sich auch das gelbe Hydrid gegen Temperaturerhöhung.

1) Die Farben am Kalium und Natrium wurden schon von K. Mey (l. c., S. 137) beobachtet.

Lichtquelle nicht in gleichem Abstande von den Zellen verblieb.

Um eine Vorstellung von dem absoluten Betrage der durch das Licht hervorgerufenen Stromintensitäten zu geben, bemerken wir, daß eine gefärbte Kaliumzelle ohne beschleunigendes Potential an das Galvanometer angeschlossen, im matten Sonnenlichte etwa $4 \cdot 10^{-6}$ Amp. lieferte. Dieser Strom stellt die Differenz derjenigen Mengen negativer Elektrizität dar, die von dem Silberbelag der Zelle und dem Anodendrahte A ausgestrahlt werden, da ja beide von dem lichtempfindlichen Hydride bedeckt sind. Schützt man A allein vor dem Lichte, so nimmt die Stromstärke noch zu.

Obgleich uns die Gegenwart des Wasserstoffs als Bedingung für das Zustandekommen der lichtempfindlichen gefärbten Schichten zweifellos schien, haben wir doch noch den Versuch gemacht, dieses Gas durch Stickstoff zu ersetzen. In Fig. 2 stellt AB das Rohr

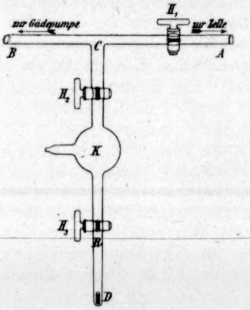


Fig. 2.

dar, das die Zelle mit der Pumpe verbindet, CD ist ein Seitenrohr, das zur Herstellung und zum Einlassen des Stickstoffs dient. H_1, H_2, H_3 bezeichnen gut abgedichtete Hähne. Ist H_1 offen, H_2 geschlossen, so läßt sich die jenseits A liegende Zelle in der vorhin beschriebenen Weise mit einer Schicht von destilliertem Kalium auf Silber versehen. Ist dies geschehen, so wird H_1 geschlossen, H_2 geöffnet, während H_3 noch geschlossen bleibt. In die Kugel K war ein Stückchen Kaliummetall eingeführt; dies wird nun so lange erhitzt, bis es lebhaft verdampft und die Kugel mit einem spiegelnden Befluge überzieht. Alle dabei entwickelten Gase schafft die ununterbrochen arbeitende Pumpe fort. Hört alle Gasentbindung auf, so wird H_2 geschlossen und H_3 für einen Moment geöffnet. In dem Rohransatz R befand sich Luft und darin ein Stückchen trockenes Kaliumhydroxyd, das zur Absorption des Kohlendioxyds und des Wasserdampfes diente. Wir haben nun also, durch H_2 und H_3 abgeschlossen, verdünnte trockene Luft in der Kugel K. Erhitzen wir sie nun von neuem, so oxydiert sich das metallische Kalium auf Kosten ihres Sauerstoffgehaltes, und Stickstoff (abgesehen von den Gasen der Argongruppe) bleibt übrig. Mittels der Hähne H_2 und H_1 kann dieser in die Zelle geleitet werden. Nach diesem Verfahren stellten wir in der letzteren über dem metallischen Kalium eine Stickstoffatmosphäre her. Eine Trübung der Oberfläche unmittelbar nach dem Einströmen des Gases (wohl durch Spuren von Sauerstoff veranlaßt, die der Absorption durch das Kalium in K entgangen waren) ließ sich durch Umschmelzen und Sublimieren des Kaliums völlig beseitigen. Leiteten wir nun den Glimmstrom durch die Zelle, so trat weder die charakteristische Blauviolettfärbung des Metalls auf, noch zeigte sich jene Vermehrung der photoelektrischen Empfindlichkeit der Zelle, wie sie bei Gegenwart von Wasserstoff beobachtet wurde[1]).

Letzteres Gas hat also einen wesentlichen Anteil an der „Sensibilisierung" der photoelektrischen Alkalimetallzellen.

Wir stellen uns den Vorgang in der Weise vor, daß zunächst der Wasserstoff sich mit dem Alkalimetall zu Hydrid vereinigt, in der so entstandenen Oberflächenschicht löst sich das Metall in kolloider Form mit intensiver Farbe auf. Der Wasserstoffgehalt dieser Lösung ist demnach geringer, als es der Zusammensetzung des farblosen Hydrids entspricht, ja vielleicht kann er beliebig klein werden, so daß die farbigen Schichten nahezu reines kolloides Alkalimetall darstellen, das vermöge seiner beträchtlichen Lichtabsorption besonders reichlich Elektronen bei Bestrahlung aussendet.

Bemerkenswert ist die Unbeständigkeit dieser farbigen Substanzen, die unmittelbar nach ihrer Herstellung oft innerhalb weniger Minuten ihr Aussehen wechseln, indem ein Umschlagen des Tones nach matteren Farben eintritt. Erhitzung und Bestrahlung mit kräftigen Kathodenstrahlen wirkt in demselben Sinne, dabei steigt der Gasdruck in den Zellen und ihre Empfindlichkeit nimmt ab, kann aber durch Entfernen des entwickelten Gases wenigstens teilweise regeneriert werden.

Wir hoffen, auf die Bedingungen dieser Veränderlichkeit noch zurückzukommen.

1) Eine schwache Grünfärbung wurde hier und da bemerkt, die vielleicht auf die Bildung von Kaliumnitrid zurückzuführen ist. Diese Verbindung ist auch von K. Mey, l. c. S. 136 auf gleichem Wege erhalten.

Die Ergebnisse der Untersuchung lassen sich in folgender Weise zusammenfassen:

1. Die Hydride der Alkalimetalle *K*, *Na*, *Rb*, *Cs* werden ähnlich wie ihre Salze durch Kathodenstrahlen gefärbt.

2. Sie sind in diesem Zustande photoelektrisch empfindlich im sichtbaren Spektralbereich.

3. Auf reinen Flächen der Alkalimetalle lassen sich bei Gegenwart verdünnten Wasserstoffs farbige Schichten derselben Art durch Einleitung einer Glimmentladung hervorrufen.

4. Hierdurch steigt die Zahl der von den Metallen bei gleicher Beleuchtung emittierten Elektronen auf das Drei- bis Vierfache.

Wir bemerken schließlich mit dem Ausdrucke unseres Dankes, daß die bei diesen Untersuchungen benutzte Gädepumpe aus Mitteln beschafft ist, die uns aus der Jagorstiftung in Berlin überwiesen waren.

(Eingegangen 7. März 1910.)

Beitrag zur Frage über den Durchgang der β-Strahlen durch Materie.

Teil II[1]).

Von Heinrich Willy Schmidt.

IV. Mischungsregel bei Verbindungen.

Für den Durchgang homogener β-Strahlen durch eine bestimmte Substanz kommen zwei Konstanten in Betracht, der „wahre Absorptionskoeffizient" α und der „Reflexionskoeffizient" β (Koeffizient der diffusen Streuung). α und β lassen sich nicht direkt ermitteln, sind aber mit den experimentell bestimmbaren Größen $1/\mu$, der „Durchdringungsfähigkeit", und p, der „maximalen reflektierten Strahlungsenergie", durch die Gleichungen verknüpft:

$$\frac{\mu}{D} = \sqrt{\frac{\alpha}{D}\left(\frac{\alpha}{D} + \frac{2\beta}{D}\right)} \qquad (8')$$

$$p = \frac{1}{\beta}\left[\alpha + \beta - \sqrt{\alpha(\alpha + 2\beta)}\right] \qquad (9')$$

(D Dichte der durchstrahlten Substanz).

Versuche mit festen Elementen haben ergeben, daß α und β in sehr einfacher Weise mit dem Atomgewicht A und der Dichte D der durchstrahlten Substanz in Zusammenhang stehen. Es ist nämlich:

$$\alpha = c_1 \frac{D}{\sqrt[3]{A}}; \quad \beta = c_2 A \cdot D, \qquad (7)$$

wo c_1 und c_2 zwei universelle, nur von der betreffenden Strahlenart abhängige Konstanten sind. Setzt man α und β aus (7) in (8') und (9') ein, so kommt man zu Formeln, in denen μ/D und p lediglich als Funktionen des Atomgewichts der durchstrahlten Substanz dargestellt sind [vgl. I, Gl. (8) und (9)].

Da

$$D = A \cdot N$$

(N Anzahl der Atome in ccm), so wird aus (7)[1]):

$$\alpha = c_1 \cdot N \sqrt[3]{A^2} \qquad (12)$$

$$\beta = c_2 \cdot N A^2. \qquad (13)$$

Unter der Annahme, daß die verschiedenen Elemente aus demselben Grundstoff aufgebaut sind und sich nur durch die Größe ihrer Atome unterscheiden, ist

$$A \backsim 4/3 \cdot \pi \cdot r^3$$

(r Radius des Atoms). Gl. (12) sagt also aus, daß der wahre Absorptionskoeffizient α proportional ist der Querschnittssumme der Atome, während die Gl. (13) in ihrer ursprünglichen Form (7) bedeutet, daß der Reflexionskoeffizient β einmal proportional ist D, d. h. dem von den Atomen wirklich eingenommenen Raum, und dann proportional A, d. h. der Anzahl der an dem Atom festsitzenden Elektronen. (J. J. Thomson.)

Es ist möglich, die Konstanten c_1 und c_2 zu berechnen, wenn man μ/D und p für eine einzige Substanz oder μ/D für zwei Substanzen von verschiedenem Atomgewicht bestimmt hat, vgl. I, Gl. (10) und (11). Eine derartige Rechnung ist früher durchgeführt unter Zugrundelegung der Werte $\mu/D = 4{,}7$ für *Al* und $\mu/D = 7{,}9$ für *Pb*. Dann wird $c_1 = 7{,}66$ und $c_2 = 0{,}113$, und für die Abhängigkeit der Größen μ/D und p erhält man Kurven, die in Fig. 11 eingezeichnet sind (vgl. auch I, Fig. 8).

Wir wollen an dieser Stelle nicht auf die Abweichung der berechneten p-Werte von den gefundenen eingehen: sie erklärt sich durch vorläufig noch nicht vermiedene Mängel der Versuchsanordnung. Dagegen ist aus Fig. 11 ohne weiteres zu ersehen, daß — mit alleiniger Ausnahme von *Ni* — die Übereinstimmung der berechneten und gefundenen μ/D-Werte vorzüglich ist. Freilich hat sich experimentell bisher nicht prüfen lassen, ob der eigentümliche Anstieg der

---

1) Teil I s. diese Zeitschr. 10, 929—948, 1909, fortan zitiert: I. Abschnitte, Formeln und Figuren sind im Anschluß an I fortlaufend numeriert.

1) Ist D, wie gewöhnlich, im C.G.S.-System ausgedrückt, also in gr/cm^{-3}, und A das Relativgewicht des Atoms in bezug auf Sauerstoff = 16,00, so ist N die Anzahl der „Grammatome" in ccm. Dabei bedeutet Grammatom in Analogie mit Grammolekel die Gewichtsmenge der Substanz, die numerisch gleich seinem Atomgewichte ist. Wenn wir in dieser Arbeit von Anzahl der Atome sprechen, so meinen wir bei der gewählten Größe der Konstanten c_1 und c_2 genauer „Anzahl der Grammatome". Ob wir sagen: proportional der Anzahl der „Grammatome" oder „Atome" ist natürlich gleichgültig, da in jedem Grammatom gleichviel Atome sind.

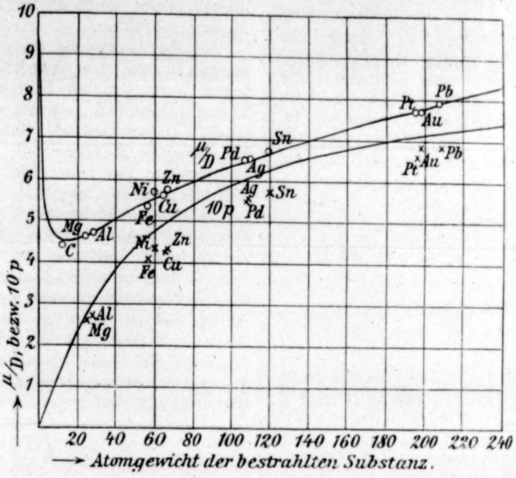


Fig. 11.

μ/D-Kurve für Substanzen mit kleinem Atomgewicht wirklich statthat. Wohl ließ sich nachweisen, daß H_2 eine abnorm hohe spezifische Ionisation zeigt und daß bei Proportionalität zwischen Ionisation und Absorption diese hohe Ionisation nach unseren theoretischen Überlegungen zahlenmäßig zu erwarten ist. Direkte Versuche über die Durchdringungsfähigkeit der β-Strahlen durch Elemente von niedrigem Atomgewicht (< 10) konnten aber bisher nicht ausgeführt werden, da es nicht möglich war, dünne gleichmäßige Schichten der in Frage kommenden Elemente zu erhalten. Auf jeden Fall erscheint es deshalb sehr erwünscht, wenigstens durch direkte Versuche an Verbindungen zu zeigen, daß tatsächlich für Substanzen von niedrigem Atomgewicht die Durchdringungsfähigkeit der β-Strahlen besonders klein ist.

Nun kennen wir aber eine außerordentlich große Anzahl chemischer Verbindungen, die eins der Elemente mit kleinem Atomgewicht enthalten, und die, wie vor allem viele Kohlenwasserstoffverbindungen, bei gewöhnlicher Temperatur flüssig sind und sich deshalb ohne große Schwierigkeiten in dünnen gleichmäßigen Schichten untersuchen lassen. Es fragt sich nun zunächst, ob bei solchen Verbindungen z. B. das H-Atom auf die Durchdringungsfähigkeit der β-Strahlen von Einfluß ist und ob sich weiterhin überhaupt die Durchdringungsfähigkeit der β-Strahlen für irgendeine Verbindung bekannter chemischer Zusammensetzung genau so aus den Konstanten c_1 und c_2 und aus dem Atomgewicht der das Molekül bildenden Elemente berechnen läßt, wie bei einfachen Substanzen.

Um zu einer Mischungsregel für zusammengesetzte Substanzen zu kommen, gehen wir auf die Gl. (12) und (13) zurück. Diese Gleichungen sagen aus, daß wir den wahren Absorptionskoeffizienten α und den Reflexionskoeffizienten β einer bestimmten Substanz bekommen, wenn wir jedes Atom vom Atomgewicht A mit $c_1 \cdot \sqrt[3]{A^2}$ bezw. $c_2 \cdot A^2$ multiplizieren und alle Atome dann addieren. Dieses Additionsgesetz soll auch für Verbindungen gelten. Wenn wir also eine Substanz von der chemischen Zusammensetzung

$$X_a Y_b Z_c \ldots$$

haben, so wird:

$$\alpha = c_1 \cdot N \cdot (a\sqrt[3]{A_x^2} + b\sqrt[3]{A_y^2} + c\sqrt[3]{A_z^2} + \cdots) \quad (12a)$$

und

$$\beta = c_2 \cdot N \cdot (a\,A_x^2 + b\,A_y^2 + c \cdot A_z^2 + \cdots), \quad (13a)$$

wo A_x, A_y, A_z das Atomgewicht des Elementes X, Y, Z bedeutet und N die Anzahl der Moleküle der Verbindung $X_a Y_b Z_c \ldots$ im ccm, aN, bN, cN also die Anzahl der Atome der einzelnen Elemente X, Y, Z im ccm. Wir ersetzen N in (12a) und (13a) durch:

$$N = D/M,$$

wo D die Dichte und M das Molekulargewicht der Verbindung $X_a Y_b Z_c \ldots$ bedeutet und erhalten:

$$\frac{\alpha}{D} = \frac{c_1}{M} \cdot (a\sqrt[3]{A_x^2} + b\sqrt[3]{A_y^2} + c\sqrt[3]{A_z^2} + \cdots) \quad (12b)$$

und

$$\frac{\beta}{D}=\frac{c_2}{M}\cdot(aA_x^2+bA_y^2+cA_z^2+\cdots). \qquad (13b)$$

Setzen wir diese Größen in (8′) und (9′) ein, so wird:

$$\frac{\mu}{D}=\frac{\beta}{D}\sqrt{u^2-1} \qquad (14)$$

$$p=u-\sqrt{u^2-1}, \qquad (15)$$

wo

$$u=1+\frac{\alpha}{\beta}$$

$$=1+\frac{c_1}{c_2}\cdot\frac{(a\sqrt[3]{A_x^2}+b\sqrt[3]{A_y^2}+c\sqrt[3]{A_z^2}+\cdots)}{(aA_x^2+bA_y^2+cA_z^2+\cdots)}$$

bedeutet und für $\frac{\beta}{D}$ der aus (13b) folgende Wert zu nehmen ist.

Aus den eben abgeleiteten Gleichungen ist ohne weiteres zu ersehen, daß μ/D und p außer von den universellen Konstanten c_1 und c_2 nur vom Atomgewicht der das Molekül bildenden Atome abhängen. Andere physikalische Größen gehen in die Gl. (14) und (15) nicht ein; denn das Molekulargewicht einer Substanz können wir stets als Summe der einzelnen Atomgewichte auffassen.

Die Gl. (14) und (15) ermöglichen uns also, für jede Verbindung von bekannter chemischer Zusammensetzung die Größen μ/D und p zu berechnen.

Wir wollen uns die Bedeutung der beiden Gleichungen an einem Beispiele klar machen und zwar wollen wir μ/D und p für Wasser $= H_2O$ berechnen.

Wir setzen also:

$$c_1=7{,}66;\quad c_2=0{,}113;\quad A_x=1;\quad A_y=16;$$
$$a=2;\quad b=1;\quad \sqrt[3]{A_x^2}=1;\quad \sqrt[3]{A_y^2}=6{,}35;$$
$$A_x^2=1;\quad A_y^2=256;$$

dann wird:

$$u=1+\frac{7{,}66}{0{,}113}\,\frac{2+6{,}35}{2+256}=3{,}194$$

$$\sqrt{u^2-1}=3{,}035$$

$$\frac{\beta}{D}=\frac{0{,}113}{18}(2+256)=1{,}619$$

$$\frac{\mu}{D}=1{,}619\times 3{,}035=4{,}91\ \mathrm{cm^2/gr^{-1}}$$

$$p=3{,}194-3{,}035=0{,}159.$$

V. Apparatbeschreibung.

Zur experimentellen Ermittlung der Größe μ/D ist es nötig, die von Schichten wechselnder Dicke hindurchgelassene Strahlung zu messen. Um die Dicke der Flüssigkeiten in einfacher Weise verändern zu können und dabei doch sicher zu sein, daß jede Schicht von parallelen Wänden begrenzt bleibt, wurde der in Fig. 12 abgebildete Apparat ausgeführt.

Auf die Außenwand eines hohlen Messingstempels S von 5 mm Wandstärke und 14 mm lichter Weite war ein Schraubengewinde von 14 mm Länge und 1,00 mm Ganghöhe eingelassen. Dieses Gewinde paßte gut in eine Messingmutter M hinein, die unten mit einer Messingplatte von 1 mm Dicke zugelötet war. Die Messingplatte war in Verlängerung der Stempelhöhlung durchbohrt. Auf das entstandene Loch wurde von oben, gerade so wie auf den Messingstempel von unten, ein Deckgläschen G vermittelst Syndetikon aufgeklebt. — In der Wand des inneren Zylinders befanden sich parallel der Achse verschiedene Löcher LL, damit beim Hineinschrauben des Stempels die verdrängte Flüssigkeit entweichen konnte. Am Stempel war noch ein Zeiger Z angebracht, der über eine längs der ganzen Außenwand des

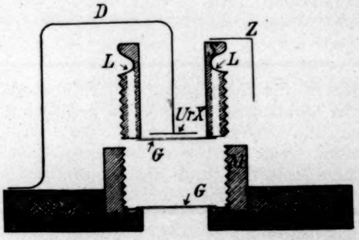


Fig. 12.

äußeren Messingzylinders M hinlaufende Einteilung spielte und eine genaue Einstellung auf etwa 0,01 mm Schichtdicke ermöglichte. — Der äußere Messingzylinder paßte stramm in eine zentral durchbohrte Bleiplatte Pb von 10 mm Dicke, die unten mit Al-Folie beklebt war und auf den Zerstreuungszylinder eines Blattelektrometers gelegt wurde.

Als Strahlungsquelle wurde $Ur\,X$ benutzt. Das Präparat wog etwa 3 mg und enthielt anfänglich eine Ur-X-Menge, die im Gleichgewichtszustande etwa 500 g Urannitrat entsprach[1]). Es wurde in dünnes Papier eingewickelt und mit

1) Über die Herstellung starker Ur-X-Präparate hoffe ich in Kürze berichten zu können. Das benutzte Präparat war mir übrigens mehr durch Zufall geglückt. Ich hatte $Ur\,X$ mit Eisenhydroxyd abgeschieden, es wieder in salzsaure Lösung gebracht, mit Barium zusammen als Sulfat gefällt und in Karbonat verwandelt. Nach Waschen mit Wasser und Ausziehen des aktiven Rückstandes mit Salzsäure blieb auf dem Filter ein kaum sichtbarer Niederschlag zurück, der nach Einäschern des Filters etwa 3 mg wog. Der größere Teil der aktiven Materie — ich arbeitete mit $Ur\,X$ aus etwa 1,5 kg Urannitrat — war freilich in die salzsaure Lösung gegangen.

etwas Klebewachs am Ende eines ∩-förmig gebogenen *Al*-Drahtes *D* angebracht. Dieser Draht wurde auf der oben erwähnten Bleiplatte befestigt und hielt während eines Versuches das Präparat innerhalb des Messingstempels in konstanter Entfernung von dem Elektroskop.

VI. Beobachtungen an festen Substanzen.

Zunächst mußte geprüft werden, wie durch die eben beschriebene Anordnung die Kurven für die durch feste Materie hindurchgelassene Strahlung beeinflußt wurden, wenn sich die feste Materie in Form dünner Platten innerhalb des eben beschriebenen Apparates befand. Denn diese Kurven sind in weitem Maße abhängig von der gewählten Versuchsanordnung (vgl. z. B. I, Fig. 4).

Einmal ist hier die Lage des Präparates zu der durchstrahlten Materie und dem Ionisationsgefäß von Bedeutung. Dann aber, und das ist vor allem zu berücksichtigen, macht es für die Steilheit der Kurven für die hindurchgelassene Strahlung etwas aus, wie das ursprüngliche Strahlenbündel zusammengesetzt ist. Selbst wenn man mit einer radioaktiven Substanz arbeitet, die homogene β-Strahlen[1]) aussendet, so werden doch in den meisten Fällen an die zu untersuchenden Schichten Strahlen herankommen, die vorher durch andersartige Materie hindurchgegangen oder von ihr reflektiert sind. Diese Strahlen haben einen Geschwindigkeitsverlust erlitten und sind weniger durchdringend als die unbeeinflußten Strahlen. Infolgedessen wird die Durchdringungsfähigkeit des gesamten Strahlenbündels durch das Hinzukommen weicherer Strahlen verringert werden.

In meinen früheren Versuchen hatte ich die zu untersuchenden Platten mit einer sehr dünnen radioaktiven Schicht bedeckt und dadurch störende Reflexionen und Absorptionen nach Möglichkeit beseitigt. Bei der jetzt gewählten Versuchsanordnung sind solche Störungen nicht zu vermeiden. Denn einmal müssen die β-Teilchen die dünnen Deckgläschen vor und nach dem Durchgang durch die zu prüfende Substanz durchsetzen. Dann gelangen Strahlen zur Beobachtung, die vorher im Innern des Messingtubus reflektiert sind. Wir können also nicht erwarten, daß die mit den beiden Versuchsanordnungen gefundenen Kurven völlig übereinstimmen.

Um einen Vergleich mit den früher untersuchten Metallblechen zu bekommen, wurden aus ihnen kreisrunde Platten von 2,30 cm Durchmesser herausgeschnitten, die gerade in die innere Höhlung der Messingmutter *M* (vgl. Fig. 12) hineinpaßten. Bei diesen Versuchen wurde das Präparat entweder an dem Drahte *D* befestigt, wie das oben beschrieben ist, oder es wurde auf den durch das Deckglas gebildeten Boden des drehbaren Messingstempels *S* gelegt. Dieser blieb dann während des ganzen Beobachtungssatzes auf die gleiche Entfernung eingestellt und hielt das Präparat deshalb stets an derselben Stelle relativ zum Elektroskop.

Die Dicken der Platten, oder worauf es bei unseren Versuchen hier ankommt, das Gewicht der Flächeneinheit, wurde durch Wägung und Ausmessung bestimmt. Und zwar war es nötig, jedes einzelne Scheibchen besonders zu wiegen. Nahm man nämlich ein scheinbar gleichmäßiges Blech, bestimmte dessen Dicke im ganzen, schnitt dann die Scheibchen heraus und bestimmte wieder durch Wägung deren Dicke, so wichen die auf beide Weisen festgestellten Blechdicken oft bis zu 5 Proz. voneinander ab. Es liegt dies an Unregelmäßigkeiten in der Dicke der ausgewalzten Schichten, die sich um so mehr bemerkbar machen, je dünner die Bleche sind. Manchmal wich selbst die Durchschnittsdicke der herausgeschnittenen Scheibchen von der Durchschnittsdicke des ursprünglichen Bleches erheblich ab, weil gerade die beim Zerschneiden abfallenden Randteile des Bleches besonders große Unregelmäßigkeiten aufwiesen.

Betont darf wohl noch werden, daß eine einzelne Kurve um so regelmäßiger ausfiel, je kleiner die benutzten Bleche waren. Denn bei kleinen Blechen werden die Abweichungen von der mittleren Dicke natürlich geringer sein als bei großen. Überhaupt sind in vielen Beziehungen die kleinen Scheibchen den verhältnismäßig großen Blechen vorzuziehen, namentlich wenn es sich um sprödes oder wertvolles Material handelt.

Die mit dem in Fig. 12 abgebildeten Apparat gefundenen Resultate für Metalle sind in Fig. 13 eingezeichnet. Als Abszisse ist wieder, wie in ähnlichen Figuren der früheren Arbeiten (vgl. z. B. I, Fig. 4—6), das Gewicht der Flächeneinheit der durchstrahlten Materie, als Ordinate der Logarithmus der Strahlungsintensität eingetragen. Das Gewicht der durchstrahlten Materie

1) Es soll hier nicht auf die kürzlich von W. Wilson, Proc. Roy. Soc. A. **82**, 612, 1909, angeschnittene Frage eingegangen werden, ob β-Strahlen von *Ur X* wirklich homogen sind, d. h. im Moment ihrer Entstehung sämtlich die gleiche Geschwindigkeit besitzen. Wilson bestreitet das nämlich auf Grund von Versuchen, die er mit magnetisch zerlegten β-Strahlen von Radium gemacht hat. Gegen die Beweiskräftigkeit der Wilsonschen Versuche haben sich bereits O. Hahn und L. Meitner gewandt, diese Zeitschr. **10**, 948, 1909. — Ich selbst gedenke in die Diskussion erst dann einzugreifen, wenn photographische Versuche über die magnetische Ablenkbarkeit von *Ur-X*-Strahlen abgeschlossen sind. Aus vorläufigen Versuchen dieser Art geht freilich hervor, daß die Geschwindigkeit der β-Strahlen von *Ur X* im Moment ihrer Entstehung konstant ist oder wenigstens nur in sehr engen Grenzen schwankt.

setzt sich zusammen aus dem konstanten Gewicht der beiden Deckgläschen (= 0,050 gr/cm^{-2}) und dem wechselnden Gewicht der untersuchten Substanz.

kleiner das Atomgewicht der durchstrahlten Substanz ist.

Das steht in völliger Übereinstimmung mit den Resultaten, die im Teil I für den Durch-

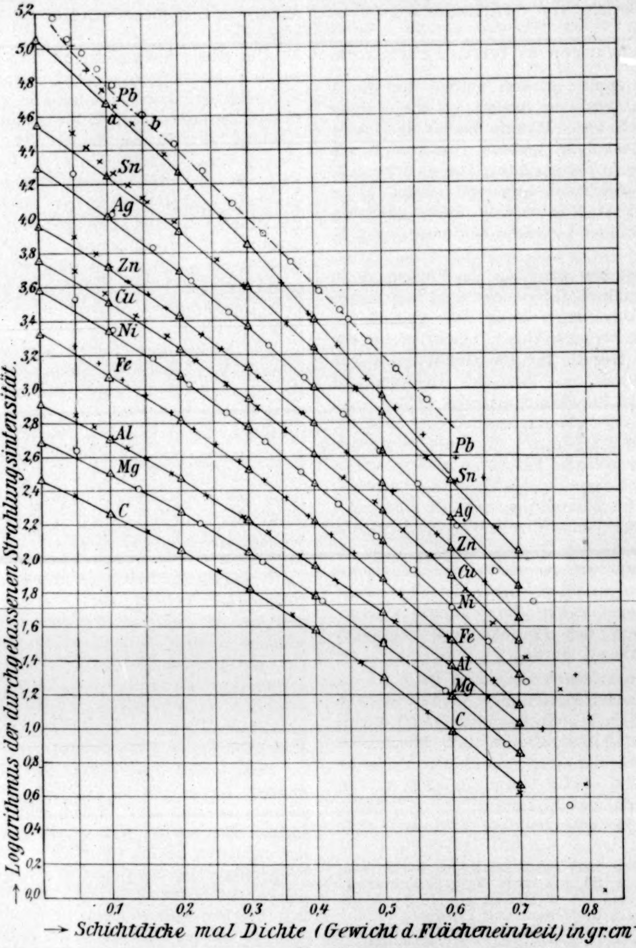


Fig. 13.

Wie wir aus Fig. 13 erkennen, sind die Kurven um so steiler gegen die Abszissenachse geneigt, je größer das Atomgewicht der durchstrahlten Substanz ist. Jede einzelne Kurve ist konkav gegen die Abszissenachse gekrümmt; und zwar ist die Krümmung um so stärker, je

gang der *Ur-X*-Strahlen durch größere Bleche (8 × 8 cm) gefunden sind. Bei näherer Vergleichung zweier mit den beiden Versuchsanordnungen bestimmten Kurven ein und derselben Substanz sind freilich quantitative Unterschiede zu erkennen. Wir finden nämlich, daß

bei den Versuchen mit den Scheibchen (Fig. 13) die Kurven für die Substanzen mit niedrigem Atomgewicht (< 30) etwas flacher, die Kurven mit hohem Atomgewicht (*Pb*) steiler und die Kurven von mittlerem Atomgewicht (50 bis 120) fast genau so verlaufen, wie die nach der ursprünglichen Methode aufgenommenen Kurven (vgl. I, Fig. 5 und 6).

Am besten werden uns diese Unterschiede klar werden, wenn wir die in Fig. 13 eingezeichneten Kurven durch eine Gleichung von der Form:

$$J_{xD} = J_0 \cdot e^{-\left(\frac{\mu}{D}\right)_0 xD - \nu (xD)^2} \qquad (5)$$

darzustellen suchen, wie wir dies in Teil I bei den Kurven der Fig. 5 und 6 getan haben. In Gl. (5) bedeutet J_{xD} bezw. J_0 die beim Gewicht der Flächeneinheit xD bezw. 0 gemessene Strahlungsintensität, e die Basis der natürlichen Logarithmen, $(\mu/D)_0$ und ν zwei der durchstrahlten Substanz charakteristische Konstante. Und zwar ist $(\mu/D)_0$ der reziproke auf die Masseneinheit bezogene Wert der Durchdringungsfähigkeit der unbeeinflußten homogenen β-Strahlen, also die Größe, auf deren zahlenmäßige Ermittlung es uns bei diesen Untersuchungen besonders ankommt.

Die nach den beiden Versuchsanordnungen gefundenen Werte sind in Tab. VI zusammengefaßt. In Fig. 13 sind die berechneten Kurvenpunkte genau so wie in den Fig. 5 und 6, durch △△ angedeutet.

Tabelle VI

	Atomgewicht	$\left(\frac{\mu}{D}\right)_0$			ν	
		I. beob.	ber.	II. beob.	I.	II.
C	12,0	4,4	4,52	4,0	2,5	2,6
Mg	24,3	4,6	4,63	4,2	2,8	2,6
Al	27,1	4,7	4,70	4,5	2,5	2,4
Fe	55,9	5,35	5,41	5,3	2,5	2,7
Ni	58,7	5,7	5,48	5,5	2,7	2,8
Cu	63,6	5,6	5,60	5,45	2,5	2,7
Zn	65,4	5,7	5,63	5,6	2,5	2,8
Ag	107,9	6,5	6,48	6,5	2,0	2,3
Sn	119,0	6,7	6,66	6,6	2,1	2,3
Pb	207,1	7,9	7,90	8,5	1,7	2,4

Aus Fig. 13 erkennen wir zunächst, daß die Übereinstimmung der berechneten und experimentell bestimmten Kurvenpunkte sehr gut ist. Auf die Abweichungen im anfänglichen Verlauf der Kurven ist ja ausführlich im Teil I, S. 940, hingewiesen.

Wenn wir uns jetzt zu Tab. VI wenden, so sehen wir, daß die Abweichungen der mit den kleinen Scheibchen gefundenen Werte von den berechneten für die Substanzen vom Atomgewicht 50 bis 120 innerhalb der Genauigkeitsgrenzen der Beobachtung liegt. Unter berechneten Werten sind dabei die nach I, Gl. (8), ausgewerteten Zahlen verstanden, die unter der Voraussetzung erhalten sind, daß $(\mu/D)_0 = 4,7$ für *Al* und $(\mu/D)_0 = 7,9$ für *Pb* ist. Wenn die nach Methode II gefundenen Werte bei Substanzen mit kleinem Atomgewicht kleiner sind als die berechneten, so mag das daran liegen, daß die Strahlen vor und nach ihrem Durchgang durch die zu untersuchende Materie die Deckgläschen durchsetzen müssen (vgl. I, Fig. 3), und daß außerdem die in schräger Richtung hindurchgehenden Strahlen durch die Messingteile des in Fig. 12 beschriebenen Apparates abgeblendet werden. Es kommen also in den Ionisationsraum vor allem Strahlen, die das untersuchte Metall senkrecht zu seinen Begrenzungsflächen durchfliegen. Und diese „Parallelstrahlen" haben, wie aus I, Fig. 4, hervorgeht, ein größeres Durchdringungsvermögen, d. h. ein kleineres $(\mu/D)_0$, als Strahlen gleichmäßiger Verteilung. — Wenn auf der anderen Seite beim hochatomigen Blei $(\mu/D)_0$ größer ist als der berechnete Wert, so ist hierfür das hohe Reflexionsvermögen des Bleis verantwortlich zu machen. Denn hierdurch wird der Prozentsatz der durch Reflexion zwischen Blei und Messing in das Ionisationsgefäß gelangenden Strahlen erhöht und dadurch das durchschnittliche Durchdringungsvermögen des zur Messung gelangenden Strahlenbündels herabgesetzt, d. h. $(\mu/D)_0$ erhöht.

Übrigens ist bereits die dünne Papierhülle, in der sich das *Ur-X*-Präparat befindet, von Einfluß auf die Durchdringungsfähigkeit des zur Messung gelangenden Strahlenbündels. Wir erkennen das an der *Pb*-Kurve „*b*" der Fig. 13. Diese Kurve ist nach der früheren Methode erhalten, indem das in Papier eingewickelte Präparat direkt auf große, die ganze Öffnung des Ionisationszylinders bedeckenden Bleifolien gelegt wurde. Die gefundenen Punkte sind durch Kreise angedeutet. Die gestrichelte Kurve stellt einen Versuch von ganz derselben Anordnung dar, nur daß als strahlende Materie eine ganz dünne Schicht unbedeckter aktiver Materie benutzt wurde (vgl. I, Fig. 6a, *Pb*-Kurve). Wir erkennen, daß die durch Kreise angedeutete Kurve ein wenig steiler ist als die gestrichelte: ein Beweis, daß die durchschnittliche Durchdringungsfähigkeit des *Ur-X*-Bündels durch die dünne Papierschicht etwas vermindert wurde.

Die Werte ν unterscheiden sich nur wenig in den beiden Versuchsanordnungen. Die Unterschiede sind z. B. viel geringer, als bei den I, Fig. 5, beschriebenen Versuchen, wo sich die beiden Versuchsreihen *a* und *b* nur dadurch unterscheiden, daß einmal die absorbierende

Schicht unbedeckt, dann mit einer Metallplatte bedeckt war.

Auf jeden Fall lassen sich die Unterschiede zwischen den nach den beiden Methoden ge-

einmal die Strahlenverteilung und dann die Zusammensetzung des Strahlenbündels von Bedeutung ist. Übrigens sind die Unterschiede für Substanzen vom Atomgewicht 30 bis 150 sehr

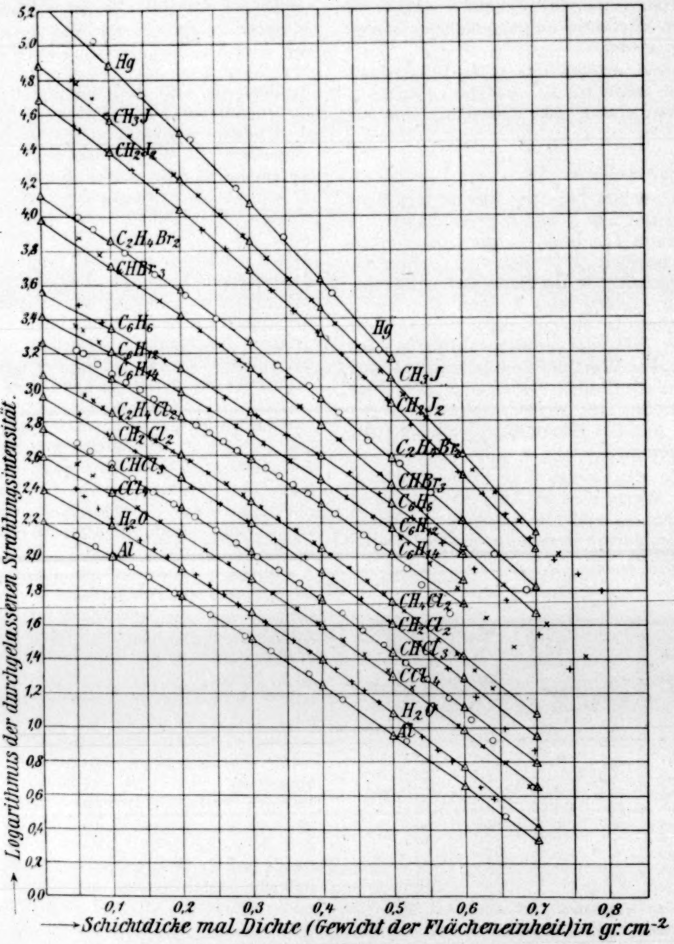


Fig. 14.

fundenen Werten für $(\mu/D)_0$ und ν zwanglos erklären, wenn man berücksichtigt, daß für die Durchdringungsfähigkeit einer bestimmten β-Strahlenart und für die Veränderung der Durchdringungsfähigkeit beim Durchgang durch Materie

gering. Und gerade mit Substanzen von diesem Atomgewichte, oder vielmehr mit Substanzen, deren Durchlässigkeit für β-Strahlen einem derartigen Atomgewichte entspricht, wollen wir uns in dem folgenden Abschnitt beschäftigen.

VII. Beobachtungen an Flüssigkeiten[1]).

In den äußeren Tubus M des in Fig. 12 abgebildeten Apparats wurde soviel Flüssigkeit eingefüllt, daß das Gewicht der Flächeneinheit etwa 0,7 gr. cm^{-2} betrug. Dann wurde der innere Tubus S eingeschraubt und beim Einschrauben sorgfältig darauf geachtet, daß keine Luftblase über der Flüssigkeit stehen blieb, sondern die gesamte Luft durch die Steigröhren LL hinausgetrieben wurde. Jetzt wurde eine Ablesung gemacht, dann der innere Tubus ein Stück eingeschraubt, abgelesen, und so fort, bis alle Flüssigkeit verdrängt war und Deckglas auf Deckglas lag[2]).

Die Versuche sind in Fig. 14 und Tabelle VII zusammengefaßt. Die berechneten $(\mu/D)_0$-Werte sind wie in Tabelle VI unter Zugrundelegung der Werte $(\mu/D)_0 = 4{,}7$ für Al und 7,9 für Pb nach Gl. (14) ausgewertet. In Fig. 14 sind die berechneten Kurvenpunkte wieder durch △△ angedeutet.

Tabelle VII.

Substanz	Chemische Formel	Dichte und Beobachtungstemperatur	$\left(\frac{\mu}{D}\right)_0$ ber.	$\left(\frac{\mu}{D}\right)_0$ beob.	ν beob.
Wasser	H_2O	1,00 bei 18°	4,91	4,90	2,3
Benzol	C_6H_6	0,880 „ 18°	4,83	4,83	1,8
Cyklohexan (Hexamethylen)	C_6H_{12}	0,782 „ 17°	4,99	4,75	2,0
Hexan (aus Propyljodid)	C_6H_{14}	0,663 „ 17°	5,08	4,75	2,0
Tetrachlorkohlenstoff. . . .	CCl_4	1,662 „ 16°	4,93	4,93	2,1
Chloroform . .	$CHCl_3$	1,500 „ 16°	4,95	4,95	2,2
Methylenchlorid	CH_2Cl_2	1,34 „ 16°	5,03	5,03	2,2
Äthylenchlorid .	$C_2H_4Cl_2$	1,252 „ 20°	5,07	5,03	2,2
Bromoform . . .	$CHBr_3$	2,86 „ 18°	5,96	5,96	2,3
Äthylenbromid .	$C_2H_4Br_2$	2,178 „ 20°	6,09	5,96	2,3
Methylenjodid .	CH_2J_2	3,324 „ 16°	6,92	6,92	2,5
Methyljodid . .	CH_3J	2,15 „ 16°	7,08	7,07	2,7
Quecksilber . .	Hg	13,55 „ 18°	7,80	8,50	2,4

Die Übereinstimmung zwischen den beobachteten und berechneten Werten ist im allgemeinen ganz vorzüglich. Unsere Resultate bestätigen also völlig die Richtigkeit der zugrundegelegten theoretischen Überlegungen und noch besonders die Richtigkeit der durch Gl. (14) gegebenen Mischungsregel.

Wenn bei Cyklohexan und Hexan $(\mu/D)_0$ merklich kleiner gefunden wird als berechnet, so wird diese Abweichung ganz ähnlich zu erklären sein, wie vorhin bei den festen Substanzen mit niedrigem Atomgewicht (vgl. Tab. VI). Und wenn wir für Hg mit dem Atomgewicht 200 denselben $(\mu/D)_0$-Wert wie für Pb mit dem Atomgewicht 207 finden, so ist das eigentlich nur zu erwarten. Für größere Schichtdicken ($>$ 0,5 gr/cm^{-2}) sind, wie aus Fig. 14 zu erkennen, die experimentell gefundenen Werte bei einigen Substanzen kleiner als die berechneten. Es sind dies durchweg Substanzen mit kleiner Dichte; und die Abweichungen sind um so mehr ausgeprägt, je geringer die Dichte der Substanz ist (vgl. besonders die drei C_6-Verbindungen). Höchstwahrscheinlich rühren diese Abweichungen nicht von einer mit zunehmender Schichtdicke besonders abnehmenden Durchdringungsfähigkeit her, sondern daher, daß die β-Teilchen einen verhältnismäßig langen, schmalen Flüssigkeitszylinder durchsetzen müssen und hier durch seitliche Streuung der Beobachtung verloren gehen. Denn unsere theoretischen Überlegungen gelten ja nur unter der Voraussetzung, daß ein Teil der Strahlen absorbiert und sämtliche Strahlen diffus zerstreut werden, daß aber diese diffus zerstreuten Strahlen nur aus den parallelen Begrenzungsflächen der durchsetzten Platten austreten.

Besonders auffallend in unseren Resultaten ist die Sonderstellung, die der Wasserstoff infolge seines extrem kleinen Atomgewichts einnimmt. Während im allgemeinen der Ersatz eines bestimmten Elements durch ein anderes Element von niedrigerem Atomgewicht die Durchdringungsfähigkeit der Strahlung erhöht, ist beim Wasserstoff das Umgekehrte der Fall. So wird z. B. die Durchlässigkeit des Sauerstoffs, die dem theoretischen Wert $(\mu/D_0) = 4{,}50$ entspricht, durch das Hinzutreten der beiden H-Atome um etwa 10 Proz. verkleinert; es wächst nämlich $(\mu/D)_0$ auf 4,91 an, also auf einen Wert, der größer ist als bei Al. Ebenso wird beim sukzessiven Ersetzen eines Cl-Atoms in CCl_4 durch ein H-Atom die Durchlässigkeit merklich herabgesetzt. Hingewiesen werden darf noch auf den Unterschied der $(\mu/D)_0$-Werte bei CH_2J_2 und CH_3J. Die beiden Werte sollen sich nach der Rechnung um etwa 2 Proz. voneinander unterscheiden. Tatsächlich läßt sich dieser Unterschied deutlich aus Fig. 14 erkennen. Und zwar ist die Durchlässigkeit von CH_2J_2 trotz des hohen Atomgewichts von J ($= 127$) um 2 Proz. größer als die von CH_3J [d. h. $(\mu/D)_0$ ist bei CH_2J_2 kleiner als bei CH_3J].

1) Messungen über die von Flüssigkeiten hindurchgelassenen β-Strahlen des $Ur\,X$ sind, soweit ich die Literatur übersehen kann, bisher nur von N. Campbell, Phil. Mag. **17**, 180, 1908, durchgeführt, freilich nach einer durchaus unzureichenden Methode. Campbell tränkt nämlich Fließpapierschichten mit der zu untersuchenden Flüssigkeit. Die so gefundenen Werte können natürlich keinerlei Anspruch auf Genauigkeit erheben. — Auf Allens Beobachtungen mit Radium-β-Strahlen kommen wir im Abschnitt 8 zu sprechen.

2) Die Flüssigkeiten wurden mir größtenteils von Herrn Geheimrat Naumann, Direktor des hiesigen Chemischen Instituts, für meine Versuche bereitwilligst zur Verfügung gestellt. Die Flüssigkeiten waren meist von Kahlbaum bezogen, Benzol und Quecksilber von Merck, Cyklohexan von Poulenc-Paris.

Sehr gut ist auch aus Tabelle VII und Fig. 14 der ziemlich große Unterschied in der Durchlässigkeit der Chlor-, Brom- und Jodverbindungen zu erkennen. Ersetzt man in einer bestimmten Verbindung Chlor durch Brom und Brom durch Jod, so wird die Durchlässigkeit der Verbindung jedesmal um etwa 12 Proz. verkleinert (d. h. μ/D erhöht).

VIII. Erklärung der Beobachtungsresultate des Herrn S. J. Allen.

Die Resultate des letzten Abschnitts sind ein Beweis für die Richtigkeit der Formel (14) und für die ihr zugrunde gelegte Mischungsregel. Es fragt sich jetzt, ob diese Mischungsregel auch für die reflektierte Strahlung gilt, ob sich also auch die maximale reflektierte Strahlungsenergie p nach Gl. (15) aus dem Atomgewicht der die Verbindung aufbauenden Elemente berechnen läßt.

Ich habe hierüber noch keine direkten Versuche angestellt, da die Methoden zur experimentellen Bestimmung von p noch nicht so durchgearbeitet sind, um absolute Werte von genügender Genauigkeit zu erhalten. Dagegen liegen über die Größe der reflektierten Strahlung oder, wie man vielfach in nicht ganz zutreffender Wahl des Ausdrucks sagt, über die Größe der „Sekundärstrahlung" schon von verschiedenen Seiten Relativbestimmungen vor. Ich übergehe hier die ersten grundlegenden Arbeiten von McClelland, der eine ganz ähnliche Abhängigkeit der reflektierten Strahlung vom Atomgewicht fand, wie sie in der p-Kurve der Fig. 11 dargestellt ist. Dagegen wende ich mich zu einer neueren Veröffentlichung Allens, der sich ausführlich mit den von Verbindungen ausgehenden „Sekundärstrahlen" befaßt hat[1]).

Bei der Versuchsanordnung von Allen wurden 5 mg Radiumbromid seitlich von der bestrahlten Substanz hinter Bleiklötzen so aufgestellt, daß die direkten Strahlen nicht in das Ionisierungsgefäß gelangen konnten. Dieses bestand aus zwei konzentrischen Halbkugelschalen oder einem langgestreckten Zylinder. Im ersteren Falle konnten die nach allen Richtungen von der Platte weggehenden Strahlen zur Messung gelangen, im letzteren Fall nur solche, die unter einem Austrittswinkel von etwa 30° zur Plattennormale weggingen. Beide Methoden ergeben Relativzahlen. Doch zeigen die nach den beiden Methoden gewonnenen Relativzahlen Abweichungen untereinander, weil die in einer bestimmten Richtung weggehende Strahlungsintensität im Verhältnis zur gesamten reflektierten Strahlung abhängt von der Natur der bestrahlten Platte.

Wenn Allen mit inhomogenen Radiumstrahlen seine Versuche ausführte, so ist das für die reflektierte Strahlungsenergie nicht von Bedeutung. Höchstwahrscheinlich ist nämlich, wie ich durch Versuche mit β-Strahlen von *Ra E* zeigen konnte (Teil I, S. 944), der Absolutwert der reflektierten Strahlungsintensität bei einer bestimmten Substanz unabhängig von der Härte der untersuchten Strahlen.

Zunächst wird in Tabelle VIII eine Zusammenstellung der Werte gegeben, die Allen für einige Elemente gefunden hat.

Tabelle VIII.

Substanz	Atomgewicht	Allens Wert		1000 p ber. Wert
		$Pb = 1000$	$Pb = 719$	
C	12,0	347	249	140
Al	27,1	500	359	296
S	32,1	578	408	336
Fe	55,9	660	474	462
Cu	63,6	732	526	488
Zn	65,4	742	533	495
Pd	106,7	839	603	596
Ag	107,9	835	600	600
Cd	112,4	870	625	611
Sb	120,2	895	643	623
Pt	195,0	966	694	708
Au	197,2	970	697	712
Hg	200,0	990	711	712
Pb	207,1	**1000**	**719**	**719**
Bi	208,0	1005	723	721

Wir sehen aus Vergleich der beiden letzten Spalten, daß für Substanzen mit einem Atomgewicht größer als etwa 50 die Abweichung zwischen den Allenschen Relativzahlen und den nach Teil I, Formel (9), berechneten Zahlen innerhalb der Genauigkeitsgrenze der Allenschen Beobachtungen liegt[1]). Für die drei Substanzen *S*, *Al* und *C* sind die berechneten Werte kleiner als die gefundenen. Dies kommt, wie McClelland nachgewiesen hat, daher, daß die Gesamtmenge der von einer Platte ausgehenden Sekundärstrahlen bei großem Einfallwinkel der Primärstrahlen abhängt im hohen Maße von der Natur der Platte. Allen fand auch selbst bei einem Versuch mit Aluminium

1) S. J. Allen, On the secondary radiation produced from solids, solutions and pure liquids, by the β-rays of Radium. Phys. Rev. **29**, 177—211, 1909. Allen selbst weist an verschiedenen Stellen seiner Arbeit auf einen möglichen Zusammenhang zwischen chemischer Konstitution und Sekundärstrahlung hin, ohne freilich die Bedeutung des Atoms klar zu erkennen. Er ließ sich wohl bei seinen Überlegungen zu sehr von dem Gedanken leiten, daß das Molekulargewicht für die Größe der Sekundärstrahlung verantwortlich sei. So sagt er l. c., S. 188: „If the radiation from a pure element is a function of the atomic weight, we should expect as a first approximation the radiation of a salt to be a function of the sum of the atomic weights of its chemical constituents, that is, of its molecular weight". Und S. 190: „Cane sugar although having a high molecular weight has only a low radiation".

1) Natürlich kann man auch zur Berechnung die allgemein gültige Formel 15 benutzen.

nach seiner zweiten Methode, wo also die ankommenden und weggehenden Strahlen einen verhältnismäßig kleinen Winkel mit der Plattennormalen bildeten, einen kleineren Wert, nämlich 480, wenn der Wert für $Pb = 1000$, oder 345, wenn der Wert für $Pb = 719$ gesetzt wird.

Bei den Versuchen, die Allen mit Verbindungen anstellte, wurden die feingepulverten Salze in einen flachen Trog von genügender Größe eingefüllt. Seine Resultate sind in Tab. IX zusammengestellt.

Tabelle IX.

		Allens Wert $Pb =$ 1000	Allens Wert $Pb =$ 719	1000 p ber.
Rohrzucker	$C_{12}H_{22}O_{11}$	330	237	175
Lithiumkarbonat .	Li_2CO_3	362	260	180
Chlorlithium	$LiCl$	490	352	314
Chlornatrium . . .	$NaCl$	500	359	321
Chlorkalzium . . .	$CaCl_2$	480	345	366
Chlorkalium	KCl	555	399	366
Manganchlorid . .	$MnCl_2$	500	359	402
Kupferchlorid . . .	$CuCl_2$	576	414	426
Strontiumchlorid .	$SrCl_2$	606	434	485
Bariumchlorid . . .	$BaCl_2$	754	542	579
Quecksilberchlorid	$HgCl_2$	878	630	658
Bleiazetat	$Pb(C_2H_3O_2)_2$	885	634	600
Bleinitrat	$Pb(NO_3)_2$	892	641	608
Bleikarbonat	$PbCO_3$	954	686	652

Wir sehen aus Tabelle IX, daß die Übereinstimmung zwischen den Allenschen Relativzahlen und den nach der Mischungsregel (15) berechneten Zahlen wieder für die Substanzen von nicht zu kleinem mittleren Atomgewicht verhältnismäßig gut ist. Noch besser wird die Übereinstimmung zwischen den beobachteten und berechneten Zahlen, wenn wir nur Verbindungen von ähnlichem chemischen Charakter vergleichen. Multiplizieren wir z. B. die von Allen für die Cl_2-Verbindungen gefundenen Relativzahlen mit 0,77, so kommen wir zu folgender Zusammenstellung:

Tabelle IXa.

Substanz	beobachtet	berechnet
$CaCl_2$	368	366
$MnCl_2$	384	402
$CuCl_2$	442	426
$SrCl_2$	466	485
$BaCl_2$	578	579
$HgCl_2$	673	658

Allen hat außerdem die Sekundärstrahlung einer großen Anzahl von organischen Flüssigkeiten bestimmt und Messungen über die Durchdringungsfähigkeit der Radium-β-Strahlen durch diese Substanzen angestellt. Er ließ dabei die Strahlen von unten in einen Glaszylinder treten, dessen Boden ein dünnes Glimmerblättchen bildete. Die Strahlungsintensität wurde bei wechselnder Höhe der unbedeckten Flüssigkeitsschicht gemessen, und es wurde aus der Dicke der Flüssigkeitsschicht, durch welche die ursprüngliche Strahlungsintensität um einen bestimmten Prozentsatz herabgesetzt wurde, „die relative Absorption der β-Strahlen berechnet, wenn für Wasser der Wert 100 genommen wird". Diese Relativwerte für μ können wir in absolute für $(\mu/D)_0$ verwandeln, wenn wir mit der Dichte der Substanz dividieren und mit 4,91/100 multiplizieren [4,91 ist laut Tabelle VII der Wert von $(\mu/D)_0$ für Wasser]. Das ist in Tabelle X geschehen. Wir dürfen die so berechneten Zahlen als Vergleichszahlen benutzen, da die Durchdringungsfähigkeit der inhomogenen Radium-β-Strahlen und die der homogenen Ur-X-β-Strahlen höchstwahrscheinlich für eine bestimmte Substanz in einem konstanten Verhältnis steht (vgl. die bereits kurz vor Tabelle VIII erwähnten Versuche über Ra-E-β-Strahlen; Teil I, S. 944).

Die Allenschen Zahlen für μ/D sind in ihrer Genauigkeit durch zwei Fehlerquellen beeinträchtigt. Einmal läßt sich bei der benutzten Versuchsanordnung, wie das Allen schon selbst betont, nur schwierig die Dicke leicht verdampfender Flüssigkeiten bestimmen. Dann ist die Dicke der Flüssigkeitsschicht, durch welche die ursprüngliche Strahlung um einen bestimmten Betrag herabgesetzt wird, gar kein genaues Maß für die Durchdringungsfähigkeit der Strahlen. Es wird hierbei gar nicht die reflektierte Strahlung berücksichtigt. Infolge dieser Fehlerquellen wird für leicht verdampfende Flüssigkeiten μ/D zu klein, für Flüssigkeiten von hohem Reflexionsvermögen μ/D zu groß gefunden werden.

Allen hat eine große Anzahl von Substanzen untersucht, die aus den vier Elementen $HCNO$ zusammengesetzt sind. Derartige Substanzen unterscheiden sich untereinander nur wenig in ihrem Reflexions- und Durchlässigkeitsvermögen. Ich sehe deshalb davon ab, die hier von Allen gefundenen Werte mit den berechneten zu vergleichen, da hierfür die Beobachtungen nicht genau genug sind, sondern beschränke mich in Tabelle X auf die Zusammenstellung einiger reiner Kohlenwasserstoffe und solche Kohlenwasserstoffe, bei denen H-Atome durch Atome der Halogengruppe ersetzt sind.

In seiner Zusammenstellung gibt Allen für die reflektierte Strahlungsenergie zwei Werte, die mit dicken und dünnen Flüssigkeitsschichten gefunden sind. Da die dünne Flüssigkeitsschicht eine Höhe von 8 mm hatte und da die durch derartige Flüssigkeitsschichten reflektierte Strahlung sich theoretisch von dem möglichen Maximalwert p der reflektierten Strahlung kaum unterscheidet, so sind die Verschiedenheiten in den

Tabelle X.

Substanz	Chemische Formel	Dichte	1000 p nach Allens Wert für Wasser = 159			$\left(\frac{\mu}{D}\right)_0$	
			dicke Schicht	dünne Schicht	ber.	nach Allens Wert für H_2O=4,91	ber.
Wasser	H_2O	1,000	159	159	159	4,91	4,91
Benzol	C_6H_6	0,879	116	—	130	3,92	4,83
Toluol	$C_6H_5CH_3$	0,822	116	—	133	4,18	4,81
Äthylbenzol	$C_6H_5C_2H_5$	0,866	—	127	126	4,86	4,84
Amylen	C_5H_{10}	(0,635)[1]	—	113	120	3,42	4,98
Methyljodid	CH_3J	2,199	446	524	593	6,35	7,08
Äthyljodid	C_2H_5J	1,944	—	519	566	7,43	7,13
Chlorbenzol	C_6H_5Cl	1,106	159	—	211	4,50	4,91
Brombenzol	C_6H_5Br	1,495	317	315	376	6,42	5,93
Jodbenzol	C_6H_5J	1,833	—	468	502	8,83	6,97
Amylbromid	$C_7H_{11}Br$	1,543	271	316	346	5,55	6,06
Propylchlorid	C_3H_7Cl	(0,88)[2]	—	127	227	3,62	5,17
Propylbromid	C_3H_7Br	(1,35)[1]	—	366	416	5,12	6,25
Tertiärbutylbromid	C_4H_9Br	(1,20)[1]	—	301	391	4.90	6,23
Isoamylbromid	$C_5H_{11}Br$	1,666	—	440	373	8,23	6,18
Äthylenchlorid[3]	C_2H_4Cl	1,280	—	390	290	5,35	5,08
Äthylenbromid[3]	C_2H_4Br	2,170	—	452	491	9,00	6,08
Chloroform	$CHCl_3$	1,526	272	303	335	5,61	4,95
Tetrachlorkohlenstoff	CCl_4	1,630	272	303	341	5,26	4,93
Azetylentretrabromid	$C_2H_2Br_4$	(2,97)[4]	—	462	518	9,22	5,98

beiden Zahlenreihen wohl auf Mängel der Versuchsanordnung zurückzuführen. In der Tabelle sind übrigens die mit 0,159 multiplizierten Allenschen Zahlen gegeben (0,159 ist der Absolutwert von p für Wasser; s. Tab. VII).

Ohne im einzelnen auf die Übereinstimmung bezw. Abweichung der in Tabelle X gegebenen experimentellen und theoretischen Werte einzugehen, wollen wir nur darauf hinweisen, wie deutlich eine Veränderung der Zahlenwerte zu erkennen ist, wenn ein H-Atom durch ein Cl-, Br- oder ein J-Atom ersetzt wird. Tritt an Stelle eines H-Atoms ein Cl-Atom, so verändern sich hierbei die Werte von p und μ/D nur unmerklich (vgl. z. B. $CHCl_3$ und CCl_4). Tritt hingegen ein Br-Atom an Stelle eines Cl-Atoms, so erfahren die Werte von p und μ/D eine deutliche Zunahme, die noch ausgeprägter wird, wenn ein J-Atom eintritt.

Diese Gesetzmäßigkeiten sind in gleicher Weise in den experimentell gefundenen und theoretisch berechneten Zahlenwerten zu finden.

Wir dürfen deshalb die Allenschen Zahlen als einen Beweis für die Richtigkeit unserer theoretischen Überlegungen ansehen und müssen annehmen, daß die Abweichungen zwischen beobachteten und berechneten Zahlen auf Mängel in der experimentellen Anordnung und nicht auf Unrichtigkeiten in den theoretischen Überlegungen zu setzen sind.

Zusammenfassung der Resultate.

1. Es wird eine Mischungsregel angegeben, aus der man das Reflexionsvermögen und die Durchdringungsfähigkeit der β-Strahlen aus zwei der Strahlenart zukommenden universellen Konstanten und der chemischen Konstitution der bestrahlten Substanz berechnen kann. In die angegebenen Formeln gehen lediglich die beiden universellen Konstanten, das Atomgewicht und die Anzahl der das Molekül bildenden Atome ein.

2. Es wird ein Apparat beschrieben, mit dem man die Durchlässigkeit von Flüssigkeiten für β-Strahlen untersuchen kann, und es wird gezeigt, daß die experimentell gefundenen Größen völlig mit den nach der Mischungsregel berechneten übereinstimmen.

3. Es wird eine Erklärung der Allenschen Beobachtungsresultate über reflektierte und durchgelassene β-Strahlung auf Grund der Mischungsregel gegeben.

Die Resultate dieser Arbeit können als ein Beweis dafür angesehen werden, daß für den

---

1) Dichte von Allen nicht angegeben.

2) Dichte von Allen angegeben zu 0,916.

3) Allen muß die beiden Substanzen Äthylenchlorid und Äthylenbromid bei seinen Versuchen verwechselt haben. Er findet nämlich für das Chlorid höhere Werte als für das Bromid und weist noch besonders auf diese Unregelmäßigkeit hin. Nun verhalten sich nach meinen Versuchen der Tab. VII und Fig. 14 die beiden Flüssigkeiten ganz regelmäßig. Ich habe deshalb die von Allen angegebenen p- und $\left(\frac{\mu}{D}\right)$-Werte für die beiden Substanzen untereinander vertauscht.

4) Dichte von „Tetrabromacetelene" nicht angegeben, aber Molekularformel C_2Br_4. Höchstwahrscheinlich ist $C_2H_2Br_4$ gemeint; denn C_2Br_4 ist bei Zimmertemperatur fest.

Durchgang der β-Strahlen durch Materie alle besonderen Unterschiede der Materie verschwinden und daß für die experimentell bestimmbaren Größen lediglich zwei der Strahlenart zukommende Konstanten und das Atomgewicht der durchstrahlten Substanz von Bedeutung sind. Da wir zu den theoretischen Ergebnissen durch verhältnismäßig einfache Annahmen über den Mechanismus der Wirkung zwischen fliegendem Elektron und ruhendem Atom gelangt sind, so können wir rückwärts aus der Übereinstimmung zwischen Experiment und Theorie auf die Richtigkeit unserer Annahmen schließen.

Natürlich müssen noch weitere Versuche an möglichst verschiedenartigen Substanzen angestellt werden, um die allgemeine Gültigkeit der gefundenen Gesetze sicher zu stellen.

Gießen, Physikalisches Institut der Universität, 11. Februar 1910.

(Eingegangen 14. Februar 1910.)

Die chemische Zerlegung des Wassers durch die α-Strahlen des Poloniums.

Von K. Bergwitz.

Giesel[1]) hat zuerst bemerkt, daß in Radiumlösungen (Radiumbromid in Wasser) eine beträchtliche Entwicklung von Gas auftritt. Runge und Bodländer untersuchten das entstandene Gas und stellten fest, daß dasselbe hauptsächlich Wasserstoff war. Sauerstoff fand sich nur in geringer Menge und Helium war nicht festzustellen. Ramsay[2]) und Soddy wiederholten die Versuche und bestimmten das Verhältnis des Sauerstoffs zum Wasserstoff im entwickelten Knallgas zu 1 : 2,6. Worauf das Defizit an Sauerstoff beruhte, wurde nicht weiter untersucht. Um präzisere Versuchsbedingungen zu haben, mischte Ramsay Wasser mit Radiumemanation, die in gleicher Weise Wasser zersetzte. Durch Verfeinerung der Meßmethode wurde von ihm auch das Helium im entwickelten Gase entdeckt.

Da die Emanation nur α-Strahlen aussendet, so muß die Wasserzersetzung auf die Einwirkung der α-Teilchen zurückgeführt werden. Wie man sich diesen Vorgang denken soll, ist fraglich. Vielleicht sprengen die α-Teilchen die Wassermoleküle durch ein stetiges Bombardement in einfachster mechanischer Weise auseinander, oder wahrscheinlicher ist es wohl, daß die Wassermoleküle durch Absprengung von Elektronen ähnlich wie die Gase ionisiert

1) Ber. D. chem. Ges. 35, 3605, 1902.
2) Proc. Roy. Soc. 72, 204, 1903.

und so chemisch zerlegt werden. Es fragt sich dann, ob die Energiemenge der α-Teilchen lediglich zur Zersetzung des Wassers gebraucht wird, oder ob ein Teil derselben noch andere Wirkungen ausübt. Um hierüber Klarheit zu erhalten, beschloß ich, mit einem starken, reinen α-Strahler, der während einiger Tage möglichst seine gleiche Intensität behält, die Versuche zu wiederholen. Es bot sich eine überaus günstige Gelegenheit dadurch, daß mir durch die große Liebenswürdigkeit des Herrn Giesel auf meine Bitte hin ein sehr starkes Präparat reinsten Poloniums zur Verfügung gestellt wurde.

Das Polonium war in gleicher Weise aus dem Blei der Pechblende gewonnen, wie es Giesel[1]) bereits veröffentlicht hat. Es wurde auf einem 5,2 cm langen und 0,8 cm breiten dünnen Kupferblech doppelseitig niedergeschlagen. Die Phosphoreszenz des Präparats war eine überaus starke. Stellte man das Plättchen senkrecht auf einen Zinksulfidschirm, so konnte man im Dunkeln mit einer Schublehre die Strahlenweite der α-Teilchen zu 3,8 cm feststellen. Die Schattengrenze war so scharf, daß wiederholte Messungen dasselbe Resultat ergaben. Auch die erregte Fluoreszenz dem Präparat benachbarter Gläser war enorm; so konnte man bequem, falls das Präparat auf dem Deckglas einer Uhr befestigt war, dieselbe ablesen. Die Nähe des Poloniums machte sich außer der ellipsoidischen Aureole durch starke Ozonisierung der Luft bemerkbar.

Die Versuchsanordnung für die Zerlegung des Wassers war eine überaus einfache. Eine kleine Meßbürette, die in einem 8 cm langen Röhrchen von 3 mm Durchmesser auslief, wurde mit reinstem Wasser beschickt. Dann wurde vorsichtig das Blech in den unten erweiterten Teil der Bürette eingeführt. Durch ein mit gleichem Wasser gefülltes Gefäßchen wurde dieselbe dann abgeschlossen. Um die Diffusion der entstehenden Gase nach außen zu verhindern, war der Boden des Abschlußgefäßes mit Quecksilber bedeckt. Auf dem Kupferblech bildeten sich dann minimale Bläschen, die langsam wuchsen, regelmäßig sich ablösten und in den oberen Teil der Bürette hinaufstiegen. Der Versuch wurde einmal über 240 Stunden, dann über 96 Stunden ausgedehnt. Nachdem genügend Gas entwickelt war, wurde das Präparat entfernt und ein frischgeschmolzenes Phosphorzylinderchen in den Gasraum eingeführt und zwei bzw. einen Tag darin belassen. Sowohl das ganze Volumen des entwickelten Gases als auch nur das des Wasserstoffes wurde volu-

1) Ber. D. chem. Ges. 41, 1059, 1908.

metrisch und durch Auswägen mit Quecksilber bestimmt.

Berücksichtigt man Temperatur, Barometerstand, Wasserstand in der Bürette und die Spannung des Wasserdampfes im Gasraum, so sind die Resultate der beiden Analysen folgende:

I. (240 Stunden.)

0,4933 cm³ H und 0,0526 cm³ O.

II. (96 Stunden.)

0,178 cm³ H und 0,0218 cm³ O.

Außerdem muß aber die Absorption der Gase im Wasser noch in Betracht gezogen werden. Diese ist folgende:

I.

0,0979 cm³ H und 0,1810 cm³ O,

so daß zusammen

0,5912 cm³ H und 0,2336 cm³ O

gebildet sind. Das Verhältnis beider ist

$$\frac{O}{H} = \frac{1}{2,5}.$$

Der stöchiometrische Wert des Sauerstoffs ist aber 0,2956 cm³, so daß also 0,062 cm³ O scheinbar verloren gegangen sind. — Die betreffenden Zahlen der zweiten Analyse sind:

II.

0,038 cm³ H und 0,0752 cm³ O,

zusammen

0,216 cm³ H und 0,0970 cm³ O.

Das Verhältnis

$$\frac{O}{H} = \frac{1}{2,1}.$$

Da der stöchiometrische Wert 0,108 cm³ O beträgt, sind 0,011 cm³ O scheinbar verschwunden. Zu welchem Zwecke der fehlende Sauerstoff gebraucht ist, ist fraglich. Wahrscheinlich oxydiert er etwas das Kupfer. Vielleicht bildet auch ein Teil mit dem entstehenden Wasserstoff Superoxyd. Allerdings ließ sich dasselbe durch Blaufärbung des Äthers bei Zusatz von Chromsäure im zweiten Falle nicht nachweisen.

Will man nun aus der Energie, die nötig ist, um eine Anzahl cm³ Knallgas zu bilden, einen Rückschluß auf die Anzahl der α-Teilchen und die Menge des wirksamen Poloniums selbst machen, so geht man am besten von der Menge des Wasserstoffs aus, zu der man die zugehörige Sauerstoffmenge berechnet. Wir legen unserer Berechnung die Daten der ersten Analyse zugrunde: also 0,5912 cm³ H + 0,2956 cm³ O = 0,8868 cm³ Knallgas. — Zur Bildung von 18 g = 33600 cm³ Knallgas sind 68500 cal erforderlich, daher für 1 cm³ . . . 2,048 cal = $8,581 \cdot 10^7$ erg.

Die Energie eines α-Teilchens des Poloniums erhält man bekanntlich nach der Formel:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{m}{e} \cdot v^2 \cdot e = 3,624 \cdot 10^{-6} \text{ erg}.$$

Die α-Teilchen haben nun in 10 Tagen 0,8868 cm³ Knallgas gebildet; hierzu ist eine Arbeit von

$$0,8868 \times 8,581 \cdot 10^7 \text{ erg} = 7,6098 \cdot 10^7 \text{ erg}$$

nötig. Nimmt man nun an, daß alle α-Teilchen zur Zerlegung des Wasserstoffs beitragen und ihre Energie[1]) dabei vollständig abgeben, so ergibt der Quotient

$$\frac{7,6098 \cdot 10^7}{3,624 \cdot 10^{-6}} = 2,1 \cdot 10^{13}$$

die Anzahl der in 10 Tagen ausgesandten α-Teilchen. In einer Sekunde werden somit

$$\frac{2,1 \cdot 10^{13}}{864000} = 2,4304 \cdot 10^7$$

α-Partikel vom Polonium ausgeschleudert. — Nun kennen wir andererseits die „radioaktive Konstante" des Poloniums

$$\lambda = 5,6 \cdot 10^{-8},$$

infolgedessen ergibt der Ansatz:

$$\frac{\frac{dN}{dt}}{\lambda} = -N;$$

$$\frac{2,4304 \cdot 10^7}{5,6 \cdot 10^{-8}} = 4,3395 \cdot 10^{14}$$

die Anzahl der vorhandenen Moleküle Polonium. Setzen wir das Atomgewicht des Radiums gleich 226, so ist das des Poloniums, da 5 α-Strahlungsprodukte in der Radiumreihe vorhanden sind, 226 — 4 · 5 = 206.

Das Atomgewicht des Poloniums mal der Anzahl der berechneten Moleküle desselben

$$206 \cdot 4,3395 \cdot 10^{14} = 893,94 \cdot 10^{14}$$

ergibt das Gewicht unseres Poloniumpräparates in bezug auf 1 Atom H. Da 1 Atom H $\frac{1}{2} \cdot \frac{9 \cdot 10^{-5}}{21 \cdot 10^{18}} = 2,1438 \cdot 10^{-24}$ g wiegt[2]), so ist das Gewicht des zur Verfügung stehenden Poloniums:

$$\backsim 2 \cdot 10^{-7} \text{ g} = 0,0002 \text{ mg}.$$

Da wir die Anzahl der ausgesandten α-Teilchen kennen, so vermögen wir den Maximalstrom zu berechnen, den diese zu unterhalten, imstande sind.

Nach den neuesten Resultaten Geigers erzeugt eine α-Partikel in der Sekunde 282000 Ionenpaare, also 141000 Ionen einer Art, falls sie ihren Wirkungsbereich vollständig ausnützen kann. Die $2,4304 \cdot 10^7$ α-Teilchen erzeugen also

$$2,4304 \cdot 10^7 \cdot 141 \cdot 10^3 = 342,69 \cdot 10^{10} \text{ Ionen}.$$

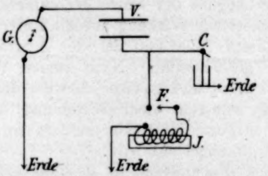
1) Würde man nur denjenigen Teil der Energie in Rechnung ziehen, den die α-Partikeln während des Durchlaufens ihrer Reichweite in Luft verlieren, so würden sich die folgenden Resultate um nicht mehr als 20 Proz. ändern.

2) Millikan gibt $1,62 \cdot 10^{-24}$ an. Phil. Mag. 19, 228, 1910.

Diese führen eine Ladung mit sich, die $342{,}69 \cdot 10^{10} \cdot 4{,}65 \cdot 10^{10}$ E.S.E. $= 1593{,}51$ E.S.E. ist, oder

$$\backsim 5{,}3 \cdot 10^{-7} \text{ Ampere.}$$

Um zu sehen, ob die gesamte Energie der α-Teilchen lediglich zur Knallgasbildung gebraucht war, wurde der soeben berechnete Strom mit dem direkt gemessenen Sättigungsstrom verglichen. Ein so starkes Präparat wie das benutzte liefert unter dem Einfluß eines mittleren elektrischen Feldes (40 Volt) schon einen Strom, der bequem mit einem empfindlichen Galvanometer (10^{-9}) zu messen ist. Die Schwierigkeit, den Sättigungsstrom zu erhalten, liegt darin, daß man sehr hohe Spannungen zur Verfügung haben muß. Nach einigen Vorversuchen wurde folgende Methode angewendet, die sich bewährte. Ein großer Induktor war einseitig geerdet; der andere Pol war mit der Spitze einer isolierten Funkenstrecke (*F*) verbunden. Bei Einschaltung



des Primärstroms springt dann ein Funken auf die der Spitze gegenüberstehende isolierte Kugel über, wodurch die Kapazität (*C*) geladen wird. Ein Draht führt zum isolierten Versuchsgefäß (*V*), in dem das Polonium sich befindet. Von dort geht der Strom über das Galvanometer zur Erde. An der Kapazität (2 große Leidener Flaschen) befand sich noch eine Vorrichtung zur Ablesung der Spannung. Sobald der Kondensator aufgeladen wird, beginnt das Galvanometer auszuschlagen und nimmt schließlich bei weiterer Elektrizitätszufuhr zu den Flaschen eine konstante Stellung ein. Wird jetzt der Induktor plötzlich abgeschaltet, so geht die Skala nur sehr langsam zurück, um schließlich schnell auf den Nullpunkt fast zurückzugehn. (Des Residuums wegen wird der Punkt erst nach dessen Verschwinden erreicht.) Man kann also sehr gut den Punkt erkennen, bei dem sicher Sättigungsstrom herrscht. Das Blech mit dem Polonium wird dann im Versuchsgefäß umgewandt und der Strom abermals in gleicher Weise gemessen. Es folgen die Resultate:

Ausschlag 134 (Seite I des Präparates)
„ 139 „ II „ „
273.

Da die 20,3 mal geringere Empfindlichkeit des Galvanometers der hohen Spannung wegen benutzt wurde, ist:

$$273 \times 20{,}3 \times 10^{-9} \sim 5 \cdot 5 \cdot 10^{-6} \text{ Amp.}$$

Rechnet man in gleicher Weise, wie oben angegeben ist, so erhält man die Poloniummenge, die diesem Sättigungsstrom entspricht, zu $\sim$ 0,002 mg Polonium.

Hiernach hat also die Methode des Sättigungsstroms zehnmal soviel an Polonium ergeben wie die Analyse der Zersetzungsprodukte des Wassers. Das Ergebnis würde bedeuten, daß im letzten Falle nur etwa $^1/_{10}$ der Strahlungsenergie zur Leistung der chemischen Arbeit aufgewandt worden ist. Das Resultat ist wohl nicht überraschend, wenn man bedenkt, daß die α-Strahlen bei ihrer Absorption in beliebigen Materialien Wärme entwickeln. Die fehlenden 90 Proz. sind also wohl demnach zur Erwärmung des Wassers verwandt worden. Im Zusammenhange mit diesen Untersuchungen scheint es mir von Interesse, die gesamte Energie der α-Strahlen an demselben Poloniumpräparat kalorimetrisch zu bestimmen. — Nach Abschluß der vorliegenden Untersuchung erschien eine gemeinsame Abhandlung der Frau Curie[1]) und des Herrn Debierne, in der die Wasserzersetzung durch das Polonium beschrieben ist und ein Weg zur Bestimmung der Menge des Poloniums angegeben ist, der mit dem beschriebenen sich zu decken scheint.

Für die freundliche Unterstützung durch Rat und Tat spreche ich den Herren Elster, Geitel und Giesel meinen verbindlichsten Dank aus.

1) C. R., 14. Febr. 1910.

Braunschweig, 27. Februar 1910.

(Eingegangen 2. März 1910.)

Beiträge zur Kenntnis der Radioaktivität des Kaliums [1]).

Von J. Elster und H. Geitel.

Die gegenwärtig bekannten und allgemein anerkannten radioaktiven Elemente, d. h. diejenigen, deren Atome im Laufe der Zeit unter Energieabgabe sich von selbst in solche von anderen Eigenschaften umwandeln, lassen sich auf Grund der Rutherford-Soddyschen Anordnung in zwei Familien einreihen. An der Spitze der ersten steht das Uran, an der der zweiten das Thorium, die Elemente von höchstem bekanntem Atomgewicht. In diesen radioaktiven Familien hat jedes Glied von seinen Vorfahren

1) Sonderabdruck aus dem XVI. Jahresberichte des Vereins für Naturwissenschaft zu Braunschweig für das Jahr 1908/09.

die Unbeständigkeit als Erbeigentümlichkeit überkommen, mit Ausnahme natürlich des letzten stabilen Elementes, das allerdings für beide Reihen bis jetzt noch nicht mit einiger Sicherheit bekannt ist.

Die Anfangsglieder Uran und Thor haben sich dank ihrer ungemein langen mittleren Lebensdauer bis in unsere Zeit erhalten; ob außer ihnen und ihren Abkömmlingen jemals andere Radioelemente gelebt haben, ob Uran und Thor selbst von ein und demselben auf der Erde vielleicht ausgestorbenen Elemente von kürzerer Lebensdauer und höherer Atommasse abstammen (etwa wie Radium und Aktinium mit ihren Nachkommen von einer Spaltung der Uranreihe herrühren), das sind Fragen, die zurzeit nicht beantwortet werden können. Zugunsten einer verwandtschaftlichen Beziehung zwischen Uran und Thor kann das Zusammengehen der beiden Elemente in ihren natürlichen Vorkommen herangezogen werden, wobei allerdings besondere Annahmen nötig wären, um das Fehlen eines konstanten Mengenverhältnisses aufzuklären. Wenn beide auf der Erde im Verlaufe sehr langer Zeiträume bis auf unendlich kleine Mengen verschwunden sein werden, so müssen mit ihnen zugleich alle übrigen jetzt anerkannten Radioelemente, wie Radium, Aktinium, Ionium, Polonium usw. erloschen sein, die sämtlich von ihnen abstammen und von kürzerer Lebensdauer sind.

Nach dieser Auffassung würde man das Uran und Thor gleichsam als Relikte einer sehr fernen Vorzeit ansehen, in der Atomumwandlungen der Elemente vielleicht weit häufiger waren als jetzt. Ihr Verhalten würde heute nicht der Regel entsprechen, sondern eine Ausnahme bilden, die sich dank besonderen Verhältnissen bis auf unsere Tage erhalten konnte.

Auf der anderen Seite gibt es eine hiervon ganz verschiedene Art, diese Dinge zu betrachten, die ebenfalls Anspruch auf Beachtung hat. Nach ihr gibt es eine absolute Stabilität der Atome nur bei wenigen Elementen, streng genommen wohl nur bei einem, dem unbekannten Endergebnisse aller Stoffumwandlungen. Im allgemeinen sind alle Elemente mehr oder weniger „radioaktiv", d. h. in Verwandlung begriffen. Daß wir von der Energie dieser Prozesse deutliche Anzeichen nicht bemerken, liegt dieser Auffassung zufolge nur in der Langsamkeit begründet, mit der sie ablaufen, d. h. im letzten Grunde in der Unvollkommenheit unserer Mittel, sie wahrzunehmen.

Es ist offenbar, daß die letztere Anschauung mit ganz besonderem Interesse alle solche Erscheinungen betrachten und verfolgen wird, die auf ein Vorkommen der Radioaktivität außerhalb der Uran- und Thorfamilie hindeuten, indem sie darin Sonderfälle der angenommenen Radioaktivität aller Materie erblickt.

Die erstgenannte Auffassung wird dagegen leicht zu dem Vorurteile geneigt sein, daß solche Anzeichen von allgemein verbreiteter Aktivität nur scheinbar seien, vorgetäuscht durch die Gegenwart sehr kleiner Mengen bekannter oder auch noch unbekannter Glieder der Uran- oder Thoriumreihe.

Während die vielfachen Bemühungen, Spuren von spezifischer Radioaktivität an beliebigem Material nachzuweisen, im allgemeinen wohl als ergebnislos bezeichnet werden müssen, sind die Arbeiten von Campbell und Wood an den Alkalimetallen Kalium und Rubidium erfolgreicher gewesen. Es kann keinem Zweifel unterliegen, daß die Verbindungen dieser Elemente eine Strahlung aussenden, die die Luft ionisiert und die photographische Platte schwärzt. Eine Schätzung der Kleinheit des Effektes kann man aus der Angabe der Entdecker entnehmen, daß die ionisierende Wirkung auf die Luft etwa dem tausendsten Teile von der der β-Strahlen des Urans gleichkommt. Nach neuen Versuchen von Henriot und Vavon[1]) besteht die Kaliumaktivität selbst in einer β-Strahlung, indem sie durch magnetische Kräfte in dem entsprechenden Sinne abgelenkt wird.

Nach dem Vorigen ist es nicht ohne grundlegende Bedeutung, mit Sicherheit festzustellen, ob diese geringe, aber mit guten Hilfsmitteln durchaus meßbare Aktivität für jene beiden Alkalimetalle eine wesentliche Eigenschaft ist, oder ob sie eben von anderen, etwa schon bekannten Radioelementen abgeleitet werden kann. Untersuchungen mit diesem Endzwecke sind außer von Campbell und Wood[2]) von McLennan und Kennedy[3]), Levin und Ruer[4]) und Strong[5]) angestellt. Der jetzige Stand der Frage kann dahin zusammengefaßt werden, daß die Annahme einer bekannten radioaktiven Beimengung in den Kalium- und Rubidiumsalzen als ausgeschlossen zu betrachten ist.

Wir haben uns in den letzten Jahren ebenfalls mit der Radioaktivität der Kaliumverbindungen beschäftigt und möchten im folgenden unsere Erfahrungen als einen Beitrag zu diesen Untersuchungen veröffentlichen, wenn es uns auch nicht geglückt ist, zu wesentlich neuen positiven Ergebnissen zu gelangen.

Durch eine eigentümliche Verkettung von

1) Compt. rend. **149**, 30, 1909.
2) Proc. Cambr. Soc. **14** (1), 15, 1906 und **14** (6), 557, 1908.
3) Phil. Mag. (6) **14**, 377, 1908.
4) Diese Zeitschr. **10**, 576, 1909.
5) Am. Chem. Journ. **42**, 147, 1909.

Umständen sind wir mit der Erscheinung der Kaliumaktivität schon zu einer Zeit in Berührung gekommen, als sie noch nicht bekannt war. Bei Gelegenheit einer Untersuchung über die allgemein verbreitete durchdringende γ-Strahlung, die ihren Ursprung in den geringen Mengen aktiver Stoffe aus der Uran- und Thorreihe hat, die überall in und auf dem Erdboden vorhanden sind, hatten wir Messungen dieser Strahlung in den unterirdischen Räumen des Salzbergwerkes Hedwigsburg bei Wolfenbüttel ausgeführt[1]). Wenn anders nämlich die Herkunft jener Strahlen richtig gedeutet wurde, so war zu erwarten, daß ihre Intensität an Orten, die rings von dicken Steinsalzschichten eingeschlossen waren, wesentlich geringer als an der Erdoberfläche sein mußte. Erfahrungsmäßig sendet nämlich das reine Steinsalz keinerlei Strahlung aus und mußte demnach als vorzüglicher Schutz gegen die von dem umgebenden Gebirge ausgehenden Strahlen wirken. Die betreffenden Messungen fielen tatsächlich in dem erwarteten Sinne aus, solange wir uns auf die Räume des Bergwerks beschränkten, die im Steinsalz lagen. Als wir uns dagegen aus dem Steinsalz in das anliegende Karnallitlager begaben, fanden wir zu unserer Verwunderung ein deutliches Ansteigen der Strahlungsintensität. Nur waren in dem Karnallitlager die Versuchsbedingungen dadurch verwickelter, daß man zur Ausfüllung der abgebauten Strecken beträchtliche Mengen Erde hineingebracht hatte. Da diese nun besonders in unserer Gegend deutlich nachweisbare Spuren von Radium enthält und ohne Zweifel Radiumemanation in jenen unterirdischen Räumen entwickelte, so war es möglich, daß hierdurch das Karnallitlager an seinen Berührungsflächen mit der Luft die Umwandlungsprodukte der Radiumemanation enthielt und dort auf diese Weise ein gewisses Strahlungsvermögen erworben hatte. Wir gaben uns damals mit dieser Auffassung zufrieden, heute erklärt sich die Erscheinung von selbst aus der dem Karnallit als einer Kaliumverbindung eigentümlichen Strahlung.

Nach dem Bekanntwerden der Entdeckung Campbells und Woods haben wir zuerst Untersuchungen an den Rohprodukten ausgeführt, die unsere Kalisalzlager liefern; für die Überlassung von Material sind wir den Direktionen der Werke Hedwigsburg und Vienenburg am Harz zu Dank verpflichtet. Es schienen uns solche Untersuchungen insofern wesentlich, als sie erkennen lassen mußten, ob während der Fabrikation der reinen Kaliumsalze des Handels etwa eine Änderung ihrer Aktivität vor sich ginge.

Die Messungen wurden in der üblichen Weise mittels einer metallenen, allseitig geschlossenen Ionisierungskammer mit aufgesetztem geeichten Elektroskop gemacht. Wir führten das getrocknete Salz selbst in einer Menge von 100 bis 125 g in einer Schichtdicke von 1 bis 2 mm darin ein und maßen — nach Abzug der Korrektion für die normale Leitfähigkeit der Luft — den Sättigungsstrom in dem von der Kammer eingeschlossenen Luftraume. Unter gewissen Vorsichtsmaßregeln — fortwährender Kontrolle der Isolation und Abwarten des stationären Zustandes der zu messenden Ionisierung — gibt diese Methode gut vergleichbare Werte und ist empfindlicher als die von Campbell und Wood, bei welcher die Strahlen des zu untersuchenden Präparates nur durch eine Aluminiumschicht zu dem Ionisierungsraum Zutritt haben[1]).

Diese ersten Messungen, zu denen unter anderen auch schöne Kristalle von Chlorkalium (Sylvin) aus Hedwigsburg verwandt wurden, ergaben keinerlei Anhalt für die Annahme irgendeines Unterschiedes in der Aktivität der natürlichen Kaliumsalze und der des Handels. Bei dem geologischen Alter der Salzlagerstätten folgt daraus, daß eine Abnahme der Kaliumaktivität in der Zeit an Präparaten von Salzen nicht erwartet werden kann, geradeso wie auch beim Uran und Thor die Aktivität als praktisch konstant anzusehen ist. Zur Ergänzung dieses Ergebnisses prüften wir auch den feinen Schlamm, der beim Lösen der natürlichen Kalisalze in Wasser niederfällt. Er zeigt eine rötliche Färbung von Eisenoxyd. Nach den Erfahrungen an den Zerfallsprodukten des Radiums könnte man erwarten, daß er vielleicht einen Teil der Kaliumaktivität „mitgerissen" habe, doch erwies er sich bei der Prüfung als völlig unwirksam; die Aktivität bleibt also beim Ausfallen des Schlammes ganz auf das Kalisalz beschränkt.

Nach diesen Erfahrungen wandten wir uns nun dem wesentlichsten Abschnitte der Untersuchung zu, der Frage nach der Abtrennbarkeit der Kaliumaktivität.

Gelingt es, aus einer gewissen Menge eines schwach aktiven Stoffes A eine kleinere eines stärker aktiven B abzuscheiden, so ist dadurch der Nachweis geliefert, daß an der Strahlung von A mindestens ein Körper von größerer Aktivität beteiligt ist. Dieser kann ein völlig fremder sein, der als Verunreinigung in A hineingeraten ist, etwa wie das Polonium in manchen Bleisorten nachweisbar ist, oder ein aktives Umwandlungsprodukt von A, wie z. B. das Radium als Bestandteil der natürlichen Uranerze.

1) Diese Zeitschr. **6**, 733, 1905.

1) Nach ihrem Kaliumgehalt sollten die Aktivitäten der drei Salze: Kaliumchlorid, Nitrat und Chlorat im Verhältnis 5 : 3,6 : 3,0 stehen, wir fanden 5 : 3,6 : 2,6, also nahe das zu erwartende.

Auf jeden Fall bedeutet eine solche „Anreicherung" der Aktivität einen wesentlichen Fortschritt, nicht zum mindesten auch schon dadurch, daß die Natur der vorliegenden Strahlungen leichter bei intensiven als bei schwachen Energieäußerungen bestimmbar ist.

Wir suchten zunächst vermittelst fraktionierter Elektrolyse zum Ziele zu kommen. Gesetzt, der Träger der Kaliumaktivität sei ein Alkalimetall von weniger elektropositivem Charakter als das Kalium, so wäre zu erwarten, daß bei einer Elektrolyse einer Chlorkaliumlösung unter Anwendung einer Quecksilberkathode das entstehende Alkalimetallamalgam den gesuchten Körper in größerer Menge im Vergleich zum Kalium enthalten müßte als die Lösung. Wir unterwarfen eine heißgesättigte Lösung von mehreren hundert Grammen rohen Hedwigsburger Chlorkaliums 3 bis 4 Stunden der Elektrolyse, dem erhaltenen, nach dem Abkühlen erstarrten Kaliumamalgam wurde durch verdünnte Salzsäure das gelöste Metall entzogen. Durch Abdampfen der Flüssigkeit erhielten wir 6 g Chlorkalium. Mit der gleichen Gewichtsmenge des Ausgangsmaterials verglichen, zeigte es keinen Unterschied der Aktivität. Der Versuch hat demnach ergeben, daß die Strahlung der Kaliumsalze nicht an ein Metall gebunden sein kann, das merklich weniger elektropositiv als das Kalium selbst ist.

Eine weitere, bei radioaktiven Stoffen mit Vorteil angewandte Trennungsmethode beruht auf Unterschieden in ihrer Löslichkeit in Wasser oder anderen Lösungsmitteln. Wir benutzten zunächst die beiden im Handel erhältlichen schwer löslichen Kaliumsalze, das Bitartrat und das Perchlorat. Gesetzt, die Aktivität hafte an einem Elemente, dessen entsprechende Salze in Wasser wesentlich leichter löslich wären als die des Kaliums, so müßte jenes bei der Fabrikation der Salze vorzugsweise in die Mutterlaugen eingehen; die Handelsprodukte müßten demnach eine spezifisch geringere Aktivität zeigen, als sie dem Kaliumgehalte entspräche. Um die Frage, wieviel in jedem Falle die Absorption der Strahlung in dem betreffenden Salze selbst ausmacht, ganz auszuschalten, stellten wir aus dem Bitartrat sowohl wie aus dem Perchlorat das Chlorid her und verglichen dies mit reinem Chlorkalium. Man eliminiert so die chemische Ungleichheit des Materials, d. h. seinen Gehalt an nur absorbierenden, nicht aktiven Stoffen. Auch hier fiel das Ergebnis negativ aus, das Chlorkalium zeigte unabhängig von seiner Darstellung dieselbe konstante Aktivität.

Dagegen glaubten wir anfangs einen kleinen Erfolg verzeichnen zu dürfen, als wir eine Lösung von Chlorkalium durch Kieselfluorwasserstoffsäure fraktioniert gefällt hatten und den Niederschlag von Kieselfluorkalium untersuchten. Es fand sich ein ganz geringer Überschuß an Aktivität über die nach dem Kaliumgehalte allein zu erwartende.

Um den Sachverhalt klarzustellen, wandten wir uns durch Vermittelung des Herrn Przibylla, Chemikers am Kgl. Kaliwerk zu Vienenburg am Harz, an die Direktion des betreffenden Werkes mit der Bitte, aus einer größeren Menge Chlorkaliums fraktionierte Fällungen mit Kieselfluorwasserstoffsäure für uns ausführen zu lassen. Dieser Bitte ist in freundlichster Weise entsprochen. Zu den Fällungen wurde ein sehr reines Chlorkalium verwandt, das von Herrn Dr. Feit aus 150 kg 99prozentigen Ausgangsmaterials durch fraktionierte Kristallisationen als schwer löslichstes Produkt erhalten war. Zwei Fällungen wurden hintereinander vorgenommen. Indessen zeigten beide uns übersandten Fraktionen bei ihrer Prüfung durchaus keine bemerkbare Anreicherung der Aktivität. Um genau vergleichbare Daten zu erlangen, verwandelten wir wieder einen Teil des Fluorkieselkaliums durch Abrauchen mit Schwefelsäure in Kaliumsulfat und letzteres durch Umsetzen mit Chlorbarium in Chlorid. Da dies Produkt sich während der chemischen Behandlung durch Aufnahme von Eisen (aus einer emaillierten Schale) als mit Eisenchlorid verunreinigt erwies, so wurde es durch Zusatz von etwas reiner Kalilauge davon befreit. Die durch Filtrieren von Eisenoxyd getrennte Lösung von Chlorkalium wurde eingedampft und das Produkt mit reinem Chlorkalium auf seine Aktivität hin verglichen. Es ergab sich kein Unterschied.

Einen zweiten Teil des Fluorkieselkaliums digerierten wir mit Kalilauge bis zum Verschwinden der alkalischen Reaktion. Die Flüssigkeit zur Trockne eingedampft ergab einen Rückstand von unzersetztem Kieselfluorkalium, von Kieselerde und Fluorkalium. Letzteres konnte leicht mit Wasser ausgezogen werden. Das getrocknete Fluorkalium war wesentlich stärker aktiv als eine gleiche Menge Chlorkalium. Das Verhältnis der Strahlungsintensitäten fand sich im Mittel als 123:100. Berechnet man indessen das zu erwartende Verhältnis einfach aus dem des Kaliumgehaltes der beiden Salze KFl und KCl, so findet man 129:100. Tatsächlich hat also keine Anreicherung der Aktivität stattgefunden. Allerdings ist diese letztere Methode der Umwandlung des Fluorkieselkaliums in Fluorkalium durch Zusatz von Kalilauge insofern unempfindlicher, als nur ein Drittel des Kaliumgehaltes des Endproduktes aus dem Kieselfluorkalium herstammt. Sie empfiehlt sich aber durch die Leichtigkeit, mit der die chemische Umsetzung erfolgt und würde, wenn wirklich

eine Konzentration der Aktivität in dem Kieselfluorkalium vorgelegen hätte, diese auch sicherlich aufgedeckt haben.

Ebensowenig war es uns möglich, einer Lösung reiner Sylvinkristalle durch Kochen mit Knochenkohle oder durch Ausfällen kolloiden Schwefels nach Zusatz von Natriumthiosulfat und Salzsäure eine Spur von aktiver Substanz zu entziehen, ein Verfahren, das gegenüber gewissen aktiven Gliedern der Uran- und Thorfamilie mit Vorteil angewandt wird.

Schließlich haben wir auch noch auf eine Emanation des Kaliums gefahndet. Bekanntlich sind gasförmige radioaktive Körper, eben die sogenannten Emanationen, in den Reihen des Thoriums, des Radiums und Aktiniums vertreten und bieten eines der schärfsten Erkennungsmittel für diese Elemente dar. Es schien — der Analogie nach — wohl möglich, daß ein radioaktives Gas auch vom Kalium entwickelt werden könnte. Schon von anderer Seite[1]) war, allerdings ohne Erfolg, nach Spuren von Radiumemanation in den Kaliumsalzen gesucht. Durch die Freundlichkeit der Kgl. Direktion des Vienenburger Werkes ist es uns ermöglicht, eine Probe auf die Existenz einer Kaliumemanation in sehr großem Maßstabe zu machen.

Wir gingen dabei von der Erwartung aus, daß eine solche Emanation analog denen des Radiums, Thoriums und Aktiniums aktive Zerfallsprodukte bildet, die, wenn die Umwandlung in atmosphärischer Luft erfolgt, von negativ geladenen Körpern angezogen werden und auf solchen sich ansammeln lassen.

Durch einen Bretterverschlag wurde uns ein großer Raum von über 10 m Höhe im Karnallitlager abgeschlossen, der eine steil ansteigende Halde eines Gerölls aus Karnallitblöcken, untermischt mit fein zerriebenem Material enthielt. Es waren somit die Bedingungen für eine leichte Diffusion einer Emanation aus diesem lockeren Gefüge in dem Beobachtungsraum sicher erfüllt. In diesem spannten wir, die Böschung der Halde empor, an isolierten Haken einen Kupferdraht aus, den wir durch Anschluß an den negativen Pol einer Trockensäule auf —2000 Volt luden. Der positive Pol stand mit der Schienenleitung der Salzförderungsanlage in Verbindung und war dadurch vorzüglich geerdet. Die freie Spannung wurde an einem Braunschen Elektrometer gemessen. Auf eine gute Erdleitung mußte Bedacht genommen werden, weil bei der großen Trockenheit der Luft in dem Raume (infolge der hygroskopischen Wirkung des Karnallits) auf eine ausreichende Ableitung durch den Holzkasten, der die Säule einschloß, nicht gerechnet werden durfte. Der Draht blieb 18 Stunden in geladenem Zustande sich selbst überlassen, dann wurde er möglichst schnell auf einen Drahtnetzzylinder aufgewunden und nach Verlauf von 30 Minuten (welche Zeit zum Heraufbefördern notwendig war) in die über Tage aufgestellte Ionisierungskammer gebracht. Er wies eine wenn auch äußerst geringe Aktivität auf, die wie die der Zerfallprodukte der Radiumemanation in etwa 30′ auf ihren Halbwert sank. Dies Ergebnis ist indessen keineswegs überraschend. Überall in den Strecken des Bergwerks wird nämlich durch die vorzügliche Wetterführung frische Außenluft verbreitet, die somit auch in den abgeschlossenen Versuchsraum langsam durch Diffusion eindringen mußte. Da sie normalerweise Radiumemanation mit sich führt, so konnten deren Zerfallsprodukte zu dem geladenen Drahte gelangen und sich auf ihm niederschlagen. Merkwürdig war allerdings eine Erscheinung, die eine nochmalige Anstellung des Versuches unter möglichster Abkürzung der Zeit zwischen dem Einholen des Drahtes und seiner Einführung in die Ionisierungskammer erfordern wird. Die schwache Aktivität des Drahtes schien nämlich anfangs etwas anzusteigen, um erst dann in regelmäßiger Weise abzufallen. Bei kurzen Expositionszeiten ist ein solcher anfänglicher Anstieg der Aktivität nichts Anormales, vielmehr eine von der Theorie vorausgesehene Folge der verschiedenen Strahlung der aufeinanderfolgenden Umwandlungsprodukte. Ob die Erscheinung in unserem Falle reell war, ob vielleicht zugleich eine gemischte Aktivierung des Drahtes durch Radium- und Thoriumabkömmlinge vorlag, darüber hoffen wir bei nächster Gelegenheit Klarheit zu gewinnen.

Immerhin ist es in hohem Maße unwahrscheinlich, daß von den Kaliumsalzen eine radioaktive Emanation entwickelt wird. Es braucht wohl kaum bemerkt zu werden, daß dieser negative Befund kein Beweismaterial gegen die Annahme einer wesentlichen Aktivität des Kaliums abgibt, er bedeutet nur das Fehlen eines gasförmigen aktiven Körpers unter den Abbauprodukten des Kaliumatoms.

Wir haben uns im vorigen auf Mitteilung der Versuche beschränkt, deren Methode in irgendeiner Weise von der anderer Beobachter abwich. Die Ergebnisse der hier beschriebenen sowie auch zahlreicher anderer Versuche, bei denen wir uns auf Wiederholung der Arbeiten von Campbell und McLennan beschränkten, haben alle zu der Bestätigung des eingangs schon hervorgehobenen Ergebnisses geführt, daß sich die Aktivität des Kaliums nicht durch Beimengungen bekannter aktiver Produkte erklären läßt. Unbekannte Radioelemente von

1) Campbell u. Wood, a. a. O.

genügend langer Lebensdauer, die ein Verhalten ähnlich der Kaliumaktivität zeigen könnten, wären vielleicht in den Uran- und Thorreihen hinter den jetzt angenommenen Endprodukten zu suchen. So könnte man an einen Körper denken, der mittelbar oder unmittelbar auf das Polonium folgte, sich durch sehr lange Umwandlungszeit und die Aussendung durchdringender β-Strahlen auszeichnete und seiner chemischen Natur nach sich wie ein Alkalimetall verhielte. Ein solcher Körper würde durch die leichte Löslichkeit seiner Verbindungen in Wasser der Auffindung vielleicht bis jetzt entgangen sein, müßte sich aber in alten Poloniumpräparaten mit genügend empfindlichen Methoden erkennen lassen. Auf unsere Bitte hat Herr Giesel die Güte gehabt, aus Lösungen alter Poloniumpräparate alle Schwermetalle einschließlich des Poloniums zu entfernen und uns die Rückstände zur Verfügung zu stellen. Es war uns indessen nicht möglich, darin etwas anderes als Spuren von Radium D zu erkennen, das sich durch eine in der Zeit langsam ansteigende α-Strahlung infolge der Regenerierung von Polonium verriet.

Da es somit nicht möglich erscheint, die Kaliumaktivität aus fremden Quellen abzuleiten oder sie von dem Kalium abzutrennen, so bleibt nichts übrig, als dies Element unter die radioaktiven mit aufzunehmen. Die Beweisführung war zunächst auf negative Ergebnisse gegründet, doch kann man auch ein positives heranziehen. Es ist dies die ebenso wie beim Kalium festgestellte Aktivität des chemisch höchst ähnlichen Rubidiums. Auch wir haben uns davon überzeugt, daß diese sicher besteht, und daß die Strahlung des Rubidiums wesentlich leichter absorbierbar ist als die des Kaliums. Dagegen zeigt das so nahe verwandte Cäsium keine Aktivität, ebensowenig wie Natrium und Lithium. Es ist nun schwer vorstellbar, selbst wenn wir annehmen wollten, daß Kalium und Rubidium ihre Aktivität derselben Beimengung verdankten, daß diese nur von dem chemisch so nahestehenden Cäsium abtrennbar sein sollte. Da nun aber Rubidium und Kalium qualitative und quantitative Unterschiede in ihrer Aktivität zeigen, so scheint es um so mehr ausgeschlossen, diese auf ein und denselben Begleiter beider Elemente zurückzuführen.

Andererseits darf man nicht unbeachtet lassen, daß durch Anerkennung der spezifischen Aktivität jener beiden Alkalimetalle gewisse Übereinstimmungen unter den Radioelementen wegfallen, auf die man bislang einigen Wert gelegt hat.

Die Atomgewichte der beiden Elemente, besonders das des Kaliums, sind im Vergleich zu denen des Urans, Thors und Radiums so niedrig, daß die plausible Vorstellung von der Instabilität eines Atoms einzig infolge zu großer Masse ihnen gegenüber nicht anwendbar bleibt. Auffallend ist auch in diesem Zusammenhange besonders der Mangel an Aktivität beim Cäsium, dem Alkalimetall vom höchsten Atomgewicht.

Ferner vermißt man die Analogie mit den langen Reihen von Umwandlungsprodukten, wie sie in der Uran- und Thorfamilie auftreten, wobei auch das Fehlen von Emanationen und α-strahlenden Körpern bemerkenswert erscheint.

Weitere Untersuchungen über die Einheitlichkeit der Kalium- und Rubidiumstrahlung, die allerdings bei der Kleinheit der Wirkung sehr schwierig sind, würden vielleicht Aufschluß darüber geben können, ob nur eine einfache Atomumwandlung vorliegt, oder eine Kette von solchen, in der jedes Glied eine durch die Geschwindigkeit der abgeschleuderten Elektronen charakterisierte Strahlung aussendet.

Auf jeden Fall verdienen die hier behandelten Erscheinungen gerade deshalb, weil sie in das sonst so vorzüglich ausgearbeitete System unserer Erfahrungen über die Radioaktivität anscheinend nicht ohne Zwang einzufügen sind, eine ganz besondere Beachtung.

Die Kosten der Untersuchung, soweit uns solche bei dem freundlichen Entgegenkommen der Direktionen der Vienenburger und Hedwigsburger Kaliwerke erwuchsen, sind, wie wir dankend hervorheben, aus Mitteln der Jagorstiftung in Berlin bestritten.

Wolfenbüttel, im November 1909.

(Eingegangen 28. Februar 1910.)

Luftelektrische Beobachtungen bei einer Ballonfahrt.

Von Albert Gockel.

Für die internationale Ballonwoche im Dezember 1909 hatte der Schweizerische Aeroklub die Güte, Herrn Dr. de Quervain und dem Verfasser seinen Ballon Gotthard zur Verfügung zu stellen. Ungünstige Witterungsverhältnisse bewirkten, daß die Fahrt auf den letzten Tag der Woche, den 11. des Monats, verschoben werden mußte. Die rein meteorologischen Beobachtungen wurden von Herrn Dr. de Quervain, der in der Führung des Ballons von Herrn Leutnant Müller unterstützt wurde, die luftelektrischen vom Verfasser vorgenommen.

Die Witterungslage an dem genannten Tage war folgende: über Irland lag ein flaches Minimum (750 mm), über Rußland ein Maximum (770 mm), in der Schweiz betrug der auf Meeres-

höhe reduzierte Druck circa 766 mm. Der Himmel war fast in ganz Mitteleuropa bedeckt. Die Windrichtung war starken lokalen Schwankungen unterworfen. In Zürich, unserm Aufstiegspunkt, wehte am Morgen schwacher Nordwind, der in der Höhe, wie unsere Fahrt aufwies, in NO überging. Über den äußeren Verlauf der Fahrt nur einige Worte. Schneefall am Morgen, der erst im Laufe des Vormittags nachließ, bewirkte, daß wir erst 11 Uhr von der Gasanstalt Schlieren bei Zürich abfahren konnten. Wir gerieten sofort in Stratuswolken, die sich in einer Höhe von 1350 m lichteten. Bei 1500 m wurden eine halbe Stunde nach der Abfahrt die Wolken durchstoßen und wir fuhren nun ständig im schönsten Sonnenschein über einer Wolkendecke, die uns jede Aussicht auf die Erde entzog. Über uns schwebten nur vereinzelte Altokumuli. Der Ballon wurde nun bis $1^h 30$ in einer Höhe von ungefähr 2500 m gehalten und dann weiter in die Höhe getrieben, $2^h 30$ wurde die höchste Höhe von 4500 m bei einer Temperatur von -22^0 C erreicht. Gegen 3 Uhr mußte wegen des Sinkens der Sonne an die Landung gedacht werden. Unterhalb 2000 m tauchten wir wieder in die Wolken ein. Die Landung erfolgte auf einer waldigen Jurahöhe westlich von Biel in einer Seehöhe von 1400 m.

Die Messungen mit dem Ebertschen Ionenapparat wurden eine Stunde nach der Abfahrt in einer Höhe von 2000 m begonnen. Die Umdrehungsgeschwindigkeit des Aspirators nahm natürlich mit abnehmendem Luftdruck zu. Da nach Angabe des Fabrikanten die in dem Intervall von 2 Glockenzeichen geförderte Luftmenge von der Umdrehungsgeschwindigkeit des Federgehäuses nur wenig beeinflußt wird, so wurde von der Anbringung der schwer zu bestimmenden Korrektur für die etwaige Änderung der Fördermenge abgesehen. Die Temperatur schwankte während der ersten Messung zwischen -7^0 und -9^0C. Die relative Feuchtigkeit lag zwischen 80 und 90 Proz. Es ergab sich J_+ (Gehalt an positiven Ionen im Kubikmeter) zu 0,156, J_- zu 0,143 E.S.E., $Q = \frac{J_+}{J_-}$ zu 1,09. Eine zweite Messung von J_- allein wurde zwischen $1^h 45$ und 2^h in einer Seehöhe von 3000 m vorgenommen. Dieselbe ergab bei einer Temperatur von -12^0 und einer relativen (mit dem am Korbrand aufgestellten Haarhygrometer gemessenen) Feuchtigkeit von 58 Proz., J_- zu nur 0,035 E.S.E. Wir befanden uns offenbar, wie auch die bei photographischen Aufnahmen konstatierte Lichtschwäche zeigte, in einer Absorptionsschicht, die sich von der Oberfläche der Wolken bis in diese Höhe erstreckte. Dagegen zeigte sich ein normaler Ionengehalt bei den beiden folgenden Messungen, die zwischen 2^h und $2^h 40$ in einer Höhe von 4000—4500 m vorgenommen wurden. Es ergab sich J_+ zu 0,462, J_- zu 0,470 E.S.E., Q also zu 0,98, d. i. unter Berücksichtigung, daß die beiden Messungen weder zu gleicher Zeit noch am gleichen Ort vorgenommen wurden $= 1$. Die Temperatur schwankte zwischen -19^0 und -22^0.

Des weiteren wurden Messungen der in der Atmosphäre vorhandenen durchdringenden Strahlung vorgenommen, das hierzu verwendete Instrument bestand aus einem Wulfschen Elektrometer, auf das eine aus 2 mm starkem Kupferblech bestehende zylindrische Ionisierungskammer von 22 cm Durchmesser und 18,5 cm Höhe, also 7,03 *l* Inhalt aufgeschraubt war. Der als Zerstreuungskörper dienende Stift hatte eine Höhe von 70 und einen Durchmesser von 9 mm. Die Kapazität des Ganzen war 6,25 cm. Sämtliche Verschraubungen waren mit Leder und Fett gut gedichtet. Trockenmittel wurden keine angewandt, weil dieselben bei den im Ballon unvermeidlichen Schwankungen des im Ring aufgehängten Apparates leicht zur Verunreinigung des Apparates hätten Veranlassung geben können. Dieselben erwiesen sich hier in Freiburg bei dem guten Verschluß des Apparates auch niemals als notwendig. Ein zweiter Apparat, der zur Kontrolle hätte dienen sollen, und dessen Isolation ohne Öffnung des Apparates geprüft werden konnte, traf leider nicht rechtzeitig ein. Die Zerstreuungsgeschwindigkeit im Apparat schwankte hier in Freiburg während dieses Winters zwischen 10 und 14 Volt Stunden, entsprechend einem Sättigungsstrom von $5,78-8,09 \times 10^{-5}$ E.S.E. Kurz vor der Abfahrt in der Maschinenhalle des Gaswerkes betrug die Zerstreuung 13,8 Volt/Stunden. Sie stieg, wie dieses auch hier in Freiburg im dichten Nebel wiederholt der Fall war, sofort auf den dreifachen Wert an, um, gleich nachdem die Wolken durchstoßen waren, auf 9,5 Volt Stunden zu fallen. Da die Isolation nicht geprüft werden konnte, so liegt natürlich die Vermutung nahe, daß das starke Ansteigen der Zerstreuung in der Wolke auf Rechnung der mangelhaft gewordenen Isolation zu setzen ist. Wie schon bemerkt, konnte aber dieselbe Erscheinung auch in Freiburg öfters beobachtet werden, wo sofort vorgenommene Isolationsbestimmungen den Beweis erbrachten, daß eine Störung der Isolation nicht vorgekommen war, und zweitens widerspricht es allen Erfahrungen, daß die mangelhaft gewordene Isolation eines solchen Elektrometers sich ohne Anwendung von Trockenmitteln oder künstlicher Erwärmung wieder verbessert und

daß der Elektrizitätsverlust im Instrument dabei innerhalb 20 Minuten auf einen Wert zurückgeht, der geringer ist als der vor dem Mangelhaftwerden der Isolation bestandene. Das Resultat steht übrigens auch im Einklang mit Versuchen von Mache, der während Regen am Erdboden noch stärkere Zunahme der durchdringenden Strahlung bemerkte. Die aktiven Niederschläge dienen offenbar, wie auch die Versuche der Frau Curie zeigen, als Kondensationskerne für die Wassertröpfchen und sinken mit diesen hernieder, es muß also in der Wolke ebenso wie in dichten Nebeln am Erdboden eine Anhäufung von α-strahlenden Elementen eintreten. Die Zunahme der Strahlung bei Regen- und Schneefall ist übrigens hier in Freiburg stets viel geringer geblieben als bei Nebel, was auch zu erwarten ist, da in letzterem Fall die strahlende Substanz sich auf allen Seiten des Instrumentes anhäuft.

Während wir uns auf der Höhe von etwa 2500 m hielten, sank die Zerstreuung zeitweilig auf 5,2 Volt Stunden, stieg aber bald wieder auf 9,4. Wenn man sich der besseren Vergleichbarkeit mit den Angaben anderer Autoren halber des alten Wertes von $3,4 \times 10^{-10}$ für die Ionenladung ε bedient, entspricht die Zerstreuung von 1 Volt Stunde einer Erzeugung von 2,45 Ionen per Sekunde im Kubikzentimeter. Während der Ballon im raschen Steigen begriffen war, schien die Zerstreuung wieder zuzunehmen, doch lege ich darauf kein Gewicht, weil eine Beeinflussung der Fadeneinstellung durch die Vertikalbewegung des Ballons und die damit verbundene Temperaturänderung nicht ausgeschlossen ist. Als der Ballon fast eine Stunde lang in einer Höhe von 4000—4500 m blieb, fand ich die Zerstreuung zu 9,2 Volt Stunden, also nur wenig geringer als unten (jede der angegebenen Zahlen ist das Mittel aus einer größeren Anzahl Ablesungen, die immer nur dann gemacht wurden, wenn der Ballonkorb möglichst ruhig war). Während des nachherigen raschen Fallens trat eine beträchtliche Verminderung der Zerstreuung ein, doch waren genaue Messungen nicht mehr möglich.

Das Resultat der Messungen ist demnach, daß in der freien Atmosphäre zwar eine Verminderung der durchdringenden Strahlung eintritt, aber lange nicht in dem Maße, wie man es erwarten könnte, wenn die Strahlung in der Hauptsache vom Boden ausgeht. Zwei Umstände könnten das Resultat unsicher machen: Erstens, der Ballon konnte sich im Erdfeld mit aktivem Niederschlag bedecken, er konnte, wenn er seine Anfangsladung mit in die Höhe nahm, wie ein negativ geladener der Atmosphäre exponierter Körper wirken. Daß sich auch in der freien Atmosphäre solche Körper noch mit Induktionen bedeckten, beweisen die Versuche von Flemming[1]). Wenn wir jedoch beim Aufstieg Wolken passierten, aus denen feiner Schnee fiel, so erscheint es mir nicht sehr wahrscheinlich, daß der Ballon 4 Stunden lang seine anfängliche Ladung bewahrte. Zweitens konnte die Isolation mangelhaft geworden sein. Dieses nachzuprüfen war mir nämlich leider nicht möglich. Zwar gingen wir schon um 3 Uhr nieder, aber der Umstand, daß wir bei dem dichten Nebel, der einen Ausblick auf die Erdoberfläche erst in unmittelbarster Nähe derselben gestattete, in einen Wald gerieten, bewirkte, daß die Bergung der Insrumente erst erfolgen konnte, als die hereinbrechende Dunkelheit zum schleunigen Einpacken zwang. Als dann spät am Abend die nächste Ortschaft erreicht war, stellte es sich heraus, daß ein kleiner Unfall, der dem Träger des Instrumentes bei dem langen Marsch im tiefen Schnee zugestoßen war, eine Isolationsprüfung unmöglich gemacht hatte. Gegen die Annahme, daß eine Verschlechterung der Isolation während der Fahrt eingetreten, spricht der Umstand, daß längere Zeit hindurch und noch am Schluß sehr geringe Zerstreuungen beobachtet wurden, zweitens lag, nachdem die Wolken einmal passiert waren, bei einer relativen Feuchtigkeit von 55 Proz. gar kein Anlaß mehr zu einer solchen vor und drittens stand das Instrument in derselben Zusammensetzung hier in Freiburg im Regen- und Schneegestöber, ohne daß ich je eine Verschlechterung der Isolation wahrnehmen konnte.

Dem Schweizerischen Aeroklub, der die Kosten der Fahrt trug, dem Vorstand der Züricher Subsektion desselben, Herrn Hauptmann Meßner und meinen beiden Begleitern spreche ich auch an dieser Stelle meinen herzlichen Dank für die geleistete Beihilfe bei diesen Untersuchungen aus.

Freiburg (Schweiz), Februar 1910.

1) H. Flemming, diese Zeitschr. **9**, 801, 1908.

(Eingegangen 25. Februar 1910.)

Über einen Einfluß des Metalls der Funkenstrecke auf die Frequenz elektrischer Schwingungen.

Von Max Wien.

§ 1. Es wird allgemein angenommen, daß bei der Entladung eines Kondensators durch einen Funken die Frequenz der elektrischen Schwingungen durch die Thomsonsche Formel

$$n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{CL} - \left(\frac{W}{2L}\right)^2}$$

gegeben sei, worin C und L die wirksame Kapazität und Induktivität, W der Leistungswiderstand ist. Die Ausmessung des im rotierenden Spiegel gewonnenen Funkenbildes ergab auch z. T. eine vorzügliche Übereinstimmung der berechneten und gemessenen Werte der Frequenz[1]).

Im Gegensatz dazu zeigte sich bei Bestimmungen des Funkendekrements mittels der Resonanzmethode, daß nicht nur das Dekrement, sondern auch die Frequenz in verhältnismäßig hohem Maße von dem Metall der Elektroden abhängt: die mit verschiedenen Metallen unter sonst genau gleichen Umständen gewonnenen Resonanzkurven waren nicht nur verschieden breit, sondern auch gegeneinander verschoben.

Die Erscheinung selbst soll zunächst durch ein Beispiel erläutert werden. Der Schwingungskreis bestand dabei aus zwei in Serie geschalteten Luftkondensatoren von je $2{,}6 \cdot 10^{-4}$ Mf., einer weiten Kupferdrahtspule von etwa 40000 cm Induktivität und einer Funkenstrecke von 0,25 cm. Die Elektroden der Funkenstrecke waren das eine Mal Magnesium-, das andere Mal Silberkugeln von 1,7 cm Durchmesser, die durch Ab- und Anschrauben vertauscht werden konnten, während im übrigen alles ungeändert blieb. Die Resonanzkurven wurden in der bekannten Weise in einem Meßkreis mittels eines Drehkondensators aufgenommen; in der folgenden Tabelle sind C_2 die Grade des Drehkondensators, α_{100} die auf den Maximalausschlag 100 umgerechneten Galvanometerausschläge.

Tabelle 1. Fig. 1.

a) Magnesium Kurve I		b) Silber Kurve II		c) Magnesium, Kurve III Schwingungskreis künstlich stärker gedämpft	
C_2	α_{100}	C_2	α_{100}	C_2	α_{100}
132°	29,1	130	29,3	126	21,1
134	55,5	132	44,8	129	41,8
136	83,3	134	65,7	132	66,8
138	100	136	83,4	135	89,5
140	90,8	138	96,4	138	100
142	67,5	140	100	141	92,9
144	38,8	142	93,8	144	72,2
146	18,7	144	82,2	147	50,8
		146	65,8	150	30,3
		148	48,9		
		150	33,3		

Aus der Fig. 1 ist zu entnehmen, daß die Resonanzkurve II (Silberelektroden) nicht nur breiter

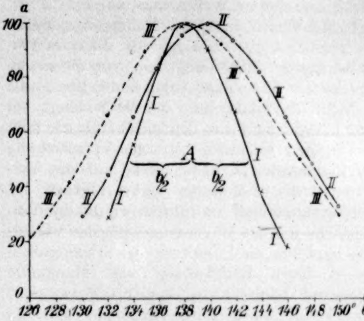


Fig. 1.

ist, sondern auch um beinahe 2° der Kondensatorteilung gegenüber der Kurve I (Magnesiumelektroden) nach rechts, also nach der größeren Wellenlänge hin, verschoben ist. Die Ausmessung der Kurven ergibt für die Halbierungspunkte der Breite der Resonanzkurve für die Kurve I bei $\alpha_{100} = 90$, $C_2 = 138{,}3$, bei $\alpha_{100} = 50$ (Punkt A der Fig. 1), 138,4, für die Kurve II bei $\alpha_{100} = 90$, $C_2 = 139{,}9$, bei $\alpha_{100} = 50$, 140,2, also eine Verschiebung von 1,6° bezw. 1,8°, oder eine Änderung von C_2 um 1,14 bezw. 1,28 Proz., entsprechend einer Vergrößerung der Wellenlänge um 0,57 bezw. 0,64 Proz.

§ 2. Das Dekrement $\mathfrak{d}_1$ der Schwingung ergibt sich aus den Resonanzkurven bei Magnesium zu 0,097, bei Silber zu 0,157. Es wäre denkbar, daß die beobachteten Verschiebungen eine direkte Folge der größeren Dämpfung seien. Die Theorie von B. Macků[1]) ergibt unter Vernachlässigung aller Korrektionsglieder für den Stromeffekt im Thermoelementkreis eine Verschiebung des Gipfels der Resonanzkurve, die einer Verkleinerung der Wellenlänge um $\left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right)_0 = \frac{\mathfrak{d}_1(\mathfrak{d}_1 + \mathfrak{d}_2)}{8\pi^2}$ entspräche, eine Verschiebung des Halbierungspunktes der Breite der Resonanzkurve für $\alpha_{100} = 50$, die eine Vergrößerung der Wellenlänge um

$$\left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right)_{50} = \frac{(\mathfrak{d}_1 + \mathfrak{d}_2)(3\mathfrak{d}_1 + 4\mathfrak{d}_2)}{8\pi^2}$$

entspräche. Daraus ergibt sich in unserem Falle bei Magnesium $(\Delta\lambda/\lambda)_0 = -0{,}01$ Proz., $(\Delta\lambda/\lambda)_{50} = +0{,}04$ Proz., bei Silber $(\Delta\lambda/\lambda)_0 = -0{,}03$ Proz., $(\Delta\lambda/\lambda)_{50} = +0{,}10$ Proz. Demnach würde Silber gegenüber Magnesium eine Verschiebung des Gipfels zeigen müssen, die einer

1) Vgl. z. B. Diesselhorst, Jahrbuch der drahtlosen Telegraphie I, S. 262, 1908; A. Campbell, Electrician, 21. Jan., 1910, S. 612.

1) B. Macků, Jahrbuch der drahtl. Telegraphie 2, 251, 1909.

Verkleinerung der Wellenlänge um 0,02 Proz., und eine Verschiebung des Halbierungspunktes der Resonanzkurve für $\alpha_{100} = 50$, die einer Vergrößerung der Wellenlänge um 0,06 Proz. entspräche — Änderungen, durch die die große beobachtete Verlängerung der Wellenlänge um 0,57 bezw. 0,64 Proz. sich nicht erklären läßt.

Um den Nachweis, daß die Verschiebung der Resonanzkurve nicht direkt auf die Vermehrung der Dämpfung zurückzuführen ist, auch experimentell zu führen, wurde die Versuchsreihe mit den Magnesiumelektroden wiederholt, nachdem die Dämpfung des Schwingungskreises durch Einschaltung von Manganinwiderstand künstlich auf $\mathfrak{d}_1 = 0{,}178$ vermehrt war. Dabei wurde Sorge getragen, daß die Induktivität des Kreises die gleiche blieb, indem durch den Manganindraht ein Stück Kupferdraht genau gleicher Länge, Dicke und Form ersetzt wurde. Die Resultate sind in der Tabelle 1 unter c) und in der Fig. 1, Kurve III gegeben. Der Gipfel der Kurve III ist nicht merklich gegen den von I verschoben, der Halbierungspunkt der Resonanzkurve für $\alpha_{100} = 50$ erscheint gegenüber dem entsprechenden Punkt von I ein wenig nach rechts verschoben (138,6 gegen 138,4), durchaus entsprechend der Macküschen Theorie. Die Verschiebung der Kurve II (Silber) ist gegen III etwa die gleiche wie gegen I, obgleich das Dekrement bei III noch größer ist, wie bei II.

§ 3. Vor Mitteilung der Resultate bei verschiedenen Metallen seien noch einige Nebenumstände besprochen.

Die Warburgsche Funkenverzögerung übt bei den meisten Metallen einen sehr erheblichen Einfluß auf die Entladung aus; es war daher notwendig, sie durch Beleuchtung der Elektroden mit ultraviolettem Licht aufzuheben. Dies geschah durch eine Bogenlampe, die der Funkenstrecke so weit genähert wurde, daß eine weitere Näherung keinen Einfluß mehr auf die Messung hatte. An anderem Ort gedenke ich auf diese Frage näher einzugehen, es sei hier nur bemerkt, daß bei Magnesium überhaupt kein merklicher Einfluß der Beleuchtung sich konstatieren ließ; eine schwache Beleuchtung genügte bei Kadmium, Zink, Aluminium, Wismut, eine stärkere mußte bei Kalzium, Blei, Platin, Kupfer, Silber verwandt werden, um die Verzögerung gänzlich aufzuheben. Eine merkliche Herabsetzung des Potentials durch die Beleuchtung trat nicht ein. Bei den Versuchen wurde auch dort, wo keine Beleuchtung nötig war (Magnesium), die Lampe brennen gelassen, um möglichst gleiche Versuchsbedingungen zu schaffen.

§ 4. Die Oberflächenbeschaffenheit der Elektroden war von merklichem Einfluß auf die Erscheinung. Bei den meisten Metallen vermindert frisches Putzen das Funkendekrement und gleichzeitig wird die Verschiebung der Resonanzkurve kleiner. Am auffälligsten war dies bei Blei. Bei ganz frisch geputzten Bleielektroden war keine Verschiebung gegen Magnesium zu konstatieren und die Dämpfung war noch etwas geringer als bei diesem. Das Dekrement stieg jedoch schnell an, und gleichzeitig verschob sich die Resonanzkurve erheblich nach rechts. Die schließlich nach längerem Funkenübergang erreichten Werte waren jedoch bei Blei so unsicher und schwankend, daß sie in die Tabelle 2 nicht aufgenommen wurden.

Ein ähnlicher, wenn auch nicht ganz so großer Einfluß des Putzens ließ sich bei den meisten Metallen nachweisen, so war z. B. bei Silber in einem Falle gleich nach dem Putzen das Dekrement $\mathfrak{d}_1 = 0{,}080$, die Vergrößerung der Wellenlänge gegen Magnesium $\Delta\lambda/\lambda = 0{,}15$ Proz.; nach 5 Minuten Funkenübergang $\mathfrak{d}_1 = 0{,}091$, $\Delta\lambda/\lambda = 0{,}25$; nach $^1/_2$ Stunde $\mathfrak{d}_1 = 0{,}109$, $\Delta\lambda/\lambda = 0{,}35$ Proz. Nach längerer Pause waren Dekrement und Verschiebung wieder etwas kleiner, um bei erneutem Funkenübergang wieder etwas anzuwachsen. Bei Magnesium war der Einfluß des Putzens sehr gering und nach wenigen Funken blieb der Wert des Dekrements und der Resonanzlage unverändert.

Die Elektrizitätsquelle (Induktorium oder Influenzmaschine) und die Größe der Elektroden hatten keinen merklichen Einfluß auf die Erscheinung. Wie sie von der Größe der Kapazität und der des Funkenpotentials abhängt, soll weiter unten gezeigt werden.

§ 5. In der Tabelle 2 sind die Resultate der Messungen an verschiedenen Metallen angeführt, die unter gleichen Umständen gewonnen waren. Die Kapazität (Preßgaskondensatoren) betrug dabei $4{,}3 \cdot 10^{-4}$ Mf., die Induktivität etwa 40000 cm, die Funkenlänge 0,5 cm. Hier, wie auch bei den übrigen Versuchen waren die Dekremente der Schwingungskreise ohne Funken sehr klein (unter 0,01), ebenso auch das des Meßkreises. Bei der Messung wurde in der bekannten Weise die Änderung der Kapazität des Meßkondensators nach beiden Seiten beobachtet, für welche der Galvanometerausschlag zur Hälfte reduziert wurde (Halbwerteinstellung). Aus der Differenz ergab sich das Dekrement, aus dem Mittel der beiden Einstellungen (z. B. Fig. 1, Punkt A) die Wellenlänge, jedoch nach § 2 wegen des Einflusses der Dämpfung etwas zu hoch. Aus der Differenz dieser Einstellungen gegenüber Kalzium und Magnesium ergab sich die unkorrigierte Änderung der Wellenlänge

$\left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right)'$, die mithin etwas zu groß ist; $\frac{\Delta\lambda}{\lambda}$ gibt dann die Änderung der Wellenlänge nach Abzug dieser kleinen Korrektion, wie sie sich aus den gemessenen Dekrementen nach der Theorie berechnet (vgl. § 2). a_m gibt die Maximalausschläge des Galvanometers im Meßkreis für das betreffende Metall, bezogen auf den $= 100$ gesetzten Ausschlag bei Kalzium.

Tabelle 2.

$F = 0{,}5$ cm. $C_1 = 4{,}3 \cdot 10^{-4}$ Mf.

Metall	$\mathfrak{d}_1$	a_m	$(\Delta\lambda/\lambda)'$ %	$\Delta\lambda/\lambda$ %
Kalzium . .	0,057	100	—	—
Magnesium	0,059	97	—	—
Wismut . .	0,062	89	0,01	0,01
Kadmium .	0,065	81	0,04	0,04
Antimon . .	0,071	77	0,09	0,08
Zink	0,071	77	0,08	0,07
Aluminium	0,073	70	0,08	0,07
Platin . . .	0,084	63	0,16	0,14
Kupfer . . .	0,090	53	0,25	0,22
Silber . . .	0,116	40	0,35	0,30

Die Metalle sind nach wachsendem Dekrement geordnet, das, wie man sieht, recht erheblich von dem Metall der Elektroden abhängt; wegen des oben besprochenen Einflusses der Oberflächenbeschaffenheit können die angegebenen Werte nur der Größenordnung nach gelten. Die Ausschläge a_m nehmen etwa der Zunahme des Dekrements entsprechend ab. Die Zunahme der Wellenlänge $\Delta\lambda/\lambda$ wächst durchweg Hand in Hand mit dem Dekrement. Diese Zunahme ist jedoch, wie schon oben besprochen, durchaus nicht etwa eine Wirkung des höheren Dekrements an sich. Diese ist sehr viel geringer und auch schon bei der Berechnung von $\frac{\Delta\lambda}{\lambda}$ aus $\left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right)'$ in Abzug gebracht. Ich komme sogleich hierauf zurück, vorher soll noch der Einfluß des Funkenpotentials und der Kapazität auf die Erscheinung erläutert werden.

§ 6. Tabelle 3 gibt die bei Magnesium-, Zink- und Silberelektroden unter gleichen sonstigen Umständen ($C_1 = 4{,}3 \cdot 10^{-4}$ Mf., $L_1 = 40000$ usw.) beobachteten Werte für verschiedene Funkenlängen.

Dekrement und Vergrößerung der Wellenlänge nehmen mit wachsender Funkenlänge ab. Andererseits tritt bei den längeren Funken die Veränderung der Wellenlänge deutlicher in die Erscheinung, weil bei der kleineren Dämpfung die Resonanz eine schärfere ist. Eigentümlich ist, daß Zink sich bei kleinen Funken in seinem ganzen Verhalten mehr dem Silber, bei größeren mehr dem Magnesium nähert.

Tabelle 4 gibt zwei Versuchsreihen, bei denen die Kapazität im Verhältnis von zirka 1 : 50 verändert wurde.

Tabelle 4.

$C_1 = 1{,}3 \cdot 10^{-4}$ Mf.

	$F = 0{,}1$ cm		$F = 0{,}25$ cm		$F = 0{,}5$ cm	
	$\mathfrak{d}_1$	$\frac{\Delta\lambda}{\lambda}$ %	$\mathfrak{d}_1$	$\frac{\Delta\lambda}{\lambda}$ %	$\mathfrak{d}_1$	$\frac{\Delta\lambda}{\lambda}$ %
Magnesium	0,14	—	0,10	—	0,07	—
Silber	0,24	0,85	0,16	0,58	0,12	0,34

$C_1 = 6{,}9 \cdot 10^{-3}$ Mf.

	$F = 0{,}1$ cm		$F = 0{,}25$ cm		$F = 0{,}5$ cm	
	$\mathfrak{d}_1$	$\frac{\Delta\lambda}{\lambda}$ %	$\mathfrak{d}_1$	$\frac{\Delta\lambda}{\lambda}$ %	$\mathfrak{d}_1$	$\frac{\Delta\lambda}{\lambda}$ %
Magnesium	0,123	—	0,080	—	0,057	—
Silber	0,155	0,23	0,119	0,16	0,084	0,09

Auch hier also Abnahme der Wellenlängenänderung mit Abnahme des Dekrements. Bei großen Kapazitäten ist die Erscheinung offenbar weniger ausgebildet wie bei kleinen und mittleren Kapazitäten.

§ 7. Aus den angeführten Versuchen folgt, daß bei den meisten Metallen unter sonst gleichen Umständen eine Zunahme des Dekrements gegenüber Kalzium und Magnesium zu beobachten ist, die von der Natur des Metalls und seiner Oberflächenbeschaffenheit abhängt. Diese Zunahme des Dekrements ist stets gleichzeitig mit einer entsprechenden Vergrößerung der Wellenlänge verknüpft. Da diese Vergrößerung der Wellenlänge nicht mit der gewöhnlichen Theorie der gedämpften Schwingungen im Einklang ist, so kann sie nur im Zusammenhang mit dem Umstande stehen, daß die Funkendämpfung nicht

Tabelle 3.

Metall	$F = 0{,}03$ cm		$F = 0{,}1$ cm		$F = 0{,}25$ cm		$F = 0{,}5$ cm		$F = 1{,}0$ cm	
	$\mathfrak{d}_1$	$\frac{\Delta\lambda}{\lambda}$ %	$\mathfrak{d}_1$	$\frac{\Delta\lambda}{\lambda}$ %	$\mathfrak{d}_1$	$\frac{\Delta\lambda}{\lambda}$ %	$\mathfrak{d}_1$	$\frac{\Delta\lambda}{\lambda}$ %	$\mathfrak{d}_1$	$\frac{\Delta\lambda}{\lambda}$ %
Magnesium . . .	0,186	—	0,131	—	0,088	—	0,059	—	0,047	—
Zink	0,239	1,29	0,197	0,81	0,113	0,25	0,071	0,07	0,053	0,01
Silber	0,264	1,39	0,204	0,89	0,145	0,42	0,116	0,30	0,067	0,22

normal verläuft, sondern während des Schwingungsverlaufs zunimmt.

Dieser anormale Verlauf der Schwingungen muß jedoch bei den verschiedenen Metallen verschieden sein, weil bei einigen Metallen die Wellenlängenänderung sehr viel größer ist wie bei anderen. Es ist unzweifelhaft, daß die Metalldämpfe — Menge, Geschwindigkeit, Abkühlung — eine sehr wichtige Rolle bei diesen Unterschieden spielen; ich verweise in dieser Beziehung auf die interessanten Funkenaufnahmen von T. Royds[1]) mit Elektroden von verschiedenen Metallen. Ehe jedoch der Versuch einer Erklärung gemacht werden kann, bedarf es noch eines viel eingehenderen experimentellen Studiums dieser Erscheinung wie des Funkenübergangs überhaupt[2]).

Daß diese Verlängerung der Wellenlänge bei den Ausmessungen der Funkenphotographien bisher noch nicht sicher hervorgetreten ist, dürfte seinen Grund einmal darin haben, daß sie an sich recht klein ist, und die Werte der Kapazität und Induktivität für schnelle Schwingungen meistens nicht sicher genug vorlagen, ferner darin, daß z. T. Metalle mit besonders geringer Wellenlängenänderung wie Kadmium (Diesselhorst) verwendet wurden, und schließlich ist es möglich, daß bei den ersten 10—20 Schwingungen, die die Photographie noch deutlich wiedergibt und die zu den Messungen benutzt werden können, die Verlängerung noch nicht in dem Maße vorhanden ist, sondern erst später mehr hervortritt, wenn das Dekrement mit Abnahme der Amplitude angewachsen ist. Es würde also unter dieser Annahme im Verlaufe der Schwingung nicht nur das Dekrement, sondern auch die Schwingungsdauer eine allmähliche Änderung erfahren.

§ 8. Es bleibt jetzt noch die Frage zu untersuchen, ob bei Magnesiumelektroden die Erscheinung auch vorhanden ist, d. h. ob bei Verwendung von Magnesiumelektroden die Schwingungen tatsächlich die richtige Frequenz, wie sie der Thomsonschen Formel entspricht, besitzen.

Wir haben oben (Tabelle 3) gesehen, daß mit sinkendem Funkenpotential das Dekrement und die Verschiebung der Resonanzkurve überall schnell größer wird; bei Magnesiumelektroden ergaben sich unter sonst gleichen Umständen ($C_1 = 4{,}3 \cdot 10^{-4}$ Mf., $L_1 = 40000$ cm) bei verschiedener Funkenlänge F folgende Werte, wobei $\Delta\lambda$ von der Einstellung für $F = 1{,}0$ cm ab gerechnet ist.

Tabelle 5.

F	$\mathfrak{d}_1$	$\left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right)'$ %	$\frac{\Delta\lambda}{\lambda}$ %
1,0 cm	0,048	—	—
0,5 „	0,063	0,015	0,007
0,2 „	0,11	0,06	0,01
0,07 „	0,16	0,16	0,05

Die sich hieraus ergebende Vergrößerung der Wellenlänge mit sinkendem Funkenpotential ist sehr gering und übersteigt kaum die Beobachtungsfehler; sie beträgt, wie aus dem Vergleich von $\left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right)'$ mit $\frac{\Delta\lambda}{\lambda}$ zu ersehen ist, nur einen Bruchteil der normalen Wirkung der Dämpfung auf die Resonanzkurve[1]) und ist z. B. für $F = 0{,}07$ mehr als zwanzigmal kleiner als die bei Silberelektroden unter gleichen Umständen beobachtete Wellenlängenänderung (vgl. Tabelle 3).

§ 9. Es wäre nun, wenn auch unwahrscheinlich, so doch möglich, daß bei Magnesiumelektroden die Resonanzkurven bei allen Funkenpotentialen die gleiche Verschiebung erlitten.

Ganz befreit man den Stromkreis von dem Funken, wenn man die Funkenstrecke kurz schließt und die Schwingungen durch Stoßerregung erzeugt. Ein direkter Vergleich der Frequenz von Schwingungen, die einmal durch Stoßerregung, das andere Mal in gewöhnlicher Weise durch eine Funkenstrecke erzeugt werden, ist nicht möglich, weil die Frequenz durch die Zuleitungen zur Funkenstrecke beeinflußt wird. Es gelang, in folgender Art die Zuleitungen bei dem Vergleich zu eliminieren.

Erzeugt man durch Stoßerregung in dem Schwingungskreis $L C_1 C_3 C_2$ (Fig. 2) Schwingungen von genügender Spannung, so tritt eine Entladung durch die dem Kondensator C_3 parallel geschaltete Funkenstrecke F ein, und es schwingt dann der Kreis $L C_1 F C_2$ mit Funkenstrecke, aber ohne Zuleitungen. Schließt man F kurz, so kann man wieder durch Stoßerregung in dem Kreis $L C_1 F C_2$ Schwingungen ohne Funkenstrecke erregen, so daß man in dieser Weise den Vergleich der Frequenz eines Schwingungskreises mit und ohne Funkenstrecke ausführen kann.

1) T. Royds, Phil. Trans. A. **203**, 333, 1908 und Phil. Mag. **19**, 285, 1910. Vgl. auch A. Battelli u. L. Magri, Phil. Mag. **5**, 629, 1903.

2) Aus diesem Grunde sei auch auf die interessante Theorie der Funkendämpfung von D. Roschansky (Jahrbuch für drahtlose Telegraphie **3**, 21, 1909) hier nur hingewiesen.

1) Bei der Mackůschen Theorie ist angenommen, daß der Thermoelementkreis einen gegen die Induktivität großen Widerstand besitzt. Diese Voraussetzung war bei meinen Versuchen nicht streng erfüllt; dadurch wird der Einfluß der normalen Dämpfung noch etwas größer und $\frac{\Delta\lambda}{\lambda}$ selbst noch kleiner als in Tabelle 5 angegeben ist.

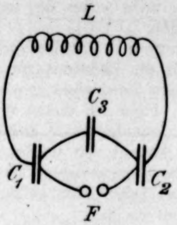


Fig. 2.

Bedenken könnte noch der Umstand machen, daß bei der Funkenentladung durch F nicht nur der Kreis $L C_1 F C_2$ schwingt, sondern gleichzeitig auch der Kondensator C_3 sich durch F entladet, also ein zweiter gekoppelter Kreis $C_3 C_1 F C_2$ mitschwingt. Es wäre möglich, daß, obgleich die Koppelung lose und die Frequenz eine sehr viel höhere ist, doch diese zweite Schwingung eine Rückwirkung auf die Frequenz des Kreises $L C_1 F C_2$ hat.

Um dies zu untersuchen, wurde der Schwingungskreis wie gewöhnlich mit Zuleitungen zur Funkenstrecke erregt und dabei einmal der Kondensator C_3 angeschlossen, so daß beide Schwingungen entstanden, das andere Mal die Verbindung mit C_3 unterbrochen, so daß der Kreis $L C_1 F C_2$ für sich allein Schwingungen machte. Es ließ sich bei Hinzutreten des Schwingungskreises C_3 eine kleine Verminderung der Dämpfung konstatieren, jedoch keine Änderung der Wellenlänge innerhalb der Fehlergrenze, die etwa 0,01 Proz. betrug.

Der eigentliche Versuch, die Messung der Frequenz bei offener und geschlossener Funkenstrecke F, geschah mittels Stoßerregung nach der Löschröhrenmethode[1]), wobei ohne Schwierigkeiten die zur Überbrückung von F notwendigen hohen Potentiale bei völlig „reiner" Stoßerregung erzielt werden konnten. Die Halbwerteinstellungen im Meßkreis erfolgten mit Hilfe eines kleinen Zusatzdrehkondensators; bei dem folgenden Beispiel entsprach einem Grad seiner Teilung eine Änderung der Wellenlänge von $\frac{1}{3650}$.

Die Halbwerteinstellungen waren bei einem Versuch:

F geschlossen	$79{,}2^0 - 99{,}8^0$	Mittel:	$89{,}50^0$
F offen	$51{,}2^0 - 128{,}7^0$	Mittel:	$89{,}95^0$
		Differenz:	$0{,}45^0$.

Wiederholung der Einstellung:

F geschlossen	$79{,}1^0 - 100{,}2^0$	Mittel:	$89{,}65^0$
F offen	$51{,}0^0 - 129{,}3^0$	Mittel:	$90{,}15^0$
		Differenz:	$0{,}50^0$.

1) Diese Zeitschr. 11, 76, 1910.

Die sehr kleine Differenz von $\frac{0{,}47^0}{3650} = 0{,}013$ Proz. entspricht etwa der normalen Wirkung der größeren Dämpfung der Schwingung mit Funkenstrecke (§ 2).

Mithin ist die Vergrößerung der Wellenlänge bei Verwendung von Magnesiumelektroden außerordentlich gering und übersteigt auch bei kleineren Funkenlängen kaum die Beobachtungsfehler. Da außerdem bei Magnesium die Funkendämpfung sehr gering ist, ferner die Oberflächenbeschaffenheit ohne Einfluß auf das Dekrement ist und schließlich eine Beleuchtung mit ultraviolettem Licht nicht nötig erscheint, so eignet sich dieses Metall ganz besonders als Material für die Elektroden. Allerdings wird durch die Entladungen die Oberfläche der Elektroden sehr schnell und stark angegriffen, so daß sie öfters erneuert werden muß.

§ 10. Zusammenfassung: Bei der Aufnahme von Resonanzkurven elektrischer Schwingungen zeigte es sich, daß das Material der Elektroden nicht nur auf die Breite, sondern auch auf die Lage der Resonanzkurve von Einfluß ist. Es ergab sich, daß unter sonst gleichen Umständen bei den meisten anderen Metallen, vor allem bei Kupfer und Silber, gegenüber Magnesium eine Verlängerung der Wellenlänge zu beobachten ist, die bei Silber unter Umständen die Größe von 1 Proz. und darüber erreichen kann. Obgleich diese Verlängerung der Wellenlänge stets Hand in Hand mit einer Vergrößerung des Dekrements geht, so läßt sie sich aus ihr unter Annahme normaler Dämpfung nicht herleiten, sondern kann nur in einem anormalen, bei den einzelnen Metallen verschiedenen Abklingen der Schwingungen ihren Grund haben. Durch besondere Versuche wurde nachgewiesen, daß bei Magnesiumelektroden der Einfluß der Funkenstrecke auf die Frequenz sehr gering ist und kaum die Einstellungsfehler übersteigt; auch aus anderen Gründen eignet sich Magnesium ganz besonders als Material für Elektroden.

5. März 1910.

Phys. Inst. d. Tech. Hochschule Danzig.

(Eingegangen 6. März 1910.)

Die Relativtheorie und die Lobatschefskijsche Geometrie.

Von V. Varićak.

In dem Vortrage über die erste Periode in der Entwicklung der nichteuklidischen Geometrie, den ich am 16. März 1907 in der feierlichen Jahressitzung der südslawischen Akademie

der Wissenschaften und Künste zu Agram gehalten habe[1]), erwähnte ich auch die Untersuchungen über das zulässige Krümmungsmaß des Raumes, beziehungsweise über die Länge der absoluten Einheitsstrecke des hyperbolischen Raumes.

Alle Längen, mit denen wir zu tun haben, verschwinden gegen diese Einheitsstrecke und deswegen reduzieren sich in den Gebieten unseres Erfahrungsraumes die Formeln der Lobatschefskijschen Geometrie auf die Ausdrücke der gewöhnlichen euklidischen Geometrie. Um das Verhältnis dieser Geometrien durch eine Analogie aus der Physik begreiflicher zu machen, verwies ich auf das Verhältnis der Mechanik der Elektronen zur Newtonschen Mechanik[2]).

Die Lorentz-Fitzgeraldsche Hypothese von der Kontraktion des Elektrons führte mich auf die Vermutung, ob sich diese Kontraktion nicht als eine Folge der geometrischen Anisotropie des Raumes deuten ließe? Sie schien mir eine Analogie zu bilden zur Deformation der Längen in einer sehr bekannten Interpretation der Lobatschefskijschen Geometrie[3]). Es scheint nun, daß sich meine Vermutung über das Hineinspielen der nichteuklidischen Geometrie in die Relativtheorie verwirklichen will. Das Erscheinen der Arbeit von Herglotz[4]) veranlaßt mich, folgende Bemerkungen gleich zu veröffentlichen, da seine Arbeit in einem Punkte teilweise in derselben Richtung geht, wie meine diesbezüglichen Untersuchungen. Der tatsächliche Inhalt meiner Mitteilung ist natürlich ein ganz anderer.

1. Die Substitution $\frac{v}{c} = \text{th}\, u$.

Diese Substitution bahnte mir den Weg zur nichteuklidischen Interpretation der Relativtheorie. Nun bemerke ich nachträglich, daß Minkowski[5]) auch einmal

$$-i \operatorname{tg} i \psi = \frac{e^{\psi} - e^{-\psi}}{e^{\psi} + e^{-\psi}} = q$$

gesetzt, d. h. das Geschwindigkeitsverhältnis als ein Tangens hyperbolicus ausgedrückt hat, aber er beachtete nicht weiter das mittlere Glied in dieser Relation.

J. J. Thomson[1]) hat das Verhältnis der Geschwindigkeit des Elektrons zur Lichtgeschwindigkeit als den Sinus eines gewissen Winkels ϑ ausgedrückt. Fasse ich diesen Winkel als Komplement des zur Länge U gehörigen Parallelwinkels, so komme ich wieder zu jener Substitution. Die verschiedenen Wege, auf denen man zu dieser Substitution gelangt ist, erhöhen das Vertrauen zu ihr.

Bei der Zusammensetzung der Geschwindigkeiten v_1 und v_2, die den Winkel α einschließen, hat man das Lobatschefskijsche Dreieck mit den Seiten u_1 und u_2 und dem eingeschlossenen Winkel $\pi - \alpha$ zu bilden. Der Geschwindigkeit v ordnet man die Länge U von der Maßzahl u nach der Relation

$$u = \text{th}^{-1} \frac{v}{c} \tag{1}$$

zu.

Nach englischer Schreibweise bedeutet $\text{th}^{-1} \frac{v}{c}$ die inverse Funktion des hyperbolischen Tangens. Wir wollen nun untersuchen, ob diese Festsetzung nicht in einem zu schroffen Gegensatze zur gewöhnlichen Veranschaulichung der Geschwindigkeiten steht? Als Repräsentanten von Geschwindigkeiten gleichförmiger Bewegungen benutzt man in der gewöhnlichen Mechanik die mit den betreffenden Geschwindigkeiten proportionalen Strecken. In den Grenzen unserer gewöhnlichen Erfahrung führt die Formel (1) zu demselben Resultate. Erst bei den Geschwindigkeiten, die mit der Lichtgeschwindigkeit einigermaßen vergleichbar sind, zeigt sich ein merklicher Unterschied, der dann schnell zur unendlichen Verzerrung führt. Als die Einheitsstrecke benutzen wir den Weg des Lichtes in einer Sekunde. Dann ist

$$\frac{U}{c} = \text{th}^{-1} \frac{v}{c} = \frac{v}{c} + \frac{1}{3}\left(\frac{v}{c}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{v}{c}\right)^5 + \cdots \tag{2}$$

Nehmen wir zuerst $v = 1$ km/sec, dann ist

$$\frac{U}{c} = \frac{1}{3 \cdot 10^5} + \frac{1}{3^4 \cdot 10^{15}} + \frac{1}{5 \cdot 3^5 \cdot 10^{25}} + \cdots \tag{3}$$

Wenn wir alles nach dem ersten Gliede auf der rechten Seite vernachlässigen, so begehen wir einen Fehler, der nicht einmal auf die zehnte Dezimale Einfluß üben würde. Man hat also auch bei unserer Festsetzung für die Geschwindigkeit von 1 km/sec eine Länge von 1 km zum Repräsentanten.

Nimmt man dann die in der gewöhnlichen Mechanik jedenfalls außerordentlich große Geschwindigkeit von 100 km/sec, so wird

1) Erschienen im „Rad jugoslavenske akademije“ **169**, 110—194, 1907.

2) a. a. O., S. 172.

3) Meine Bemerkungen zu dieser Interpretation sind erschienen im Rad jugoslavenske akademije **154**, 81—131, 1903. Mit dieser Interpretation befaßt sich auch A. Schwarz: Zur Theorie der reellen linearen Transformationen und der Lobatschefskijschen Geometrie, Wien. Sitzungsb., II. Abt., **99**, 1890. Bonolas Index operum ad geometriam absolutam spectantium, in der Klausenburger Festschrift, erwähnt diese Abhandlung nicht.

4) Herglotz, Über den vom Standpunkt des Relativitätsprinzips aus als „starr“ zu bezeichnenden Körper. Ann. d. Phys. **31**, 383, 1910.

5) Minkowski, Die Grundgleichungen usw., Göttinger Nachrichten, S. 59, 1908.

1) Lodge, Elektronen, S. 120.

$$\frac{U}{c} = \frac{1}{3 \cdot 10^3} + \frac{1}{3 \cdot 3^3 \cdot 10^9} + \frac{1}{5 \cdot 3^5 \cdot 10^{15}} + \cdots,$$

und die repräsentierende Länge U ist beiläufig um 3 mm größer von 100 km. Der Geschwindigkeit von 100000 km/sec entspricht die Länge von 103700 km.

Ziehen wir noch zwei Geschwindigkeiten von β-Strahlen in Betracht, die in dem berühmten Kaufmannschen Versuche berechnet wurden und denen die Geschwindigkeitsverhältnisse 0,7202 und 0,9326 entsprechen. Sie betragen etwa 216060 und 279780 km/sec und sie werden repräsentiert durch die Längen von 272400 und 503400 km.

Für $v = c$ hat man $U = \infty$.

In graphischer Darstellung lassen sich diese Verhältnisse sehr leicht überblicken. Nimmt

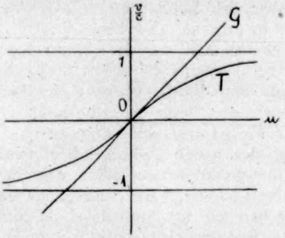


Fig. 1.

man u als Abszisse und $\frac{v}{c}$ als Ordinate, so wird (1) durch die Kurve T dargestellt. Der gewöhnlichen Festsetzung $u = \frac{v}{c}$ entspricht die Gerade G bzw. das erste Glied in der unendlichen Reihe (2). Diese Gerade ist die Inflexionstangente von T in O, schmiegt sich also der Kurve in ziemlich weiter Umgebung des Koordinatenanfangspunktes gut an.

Die Fig. 1 kann uns bei der Zusammensetzung der Geschwindigkeiten gute Dienste leisten. Man kann zur resultierenden Länge U gleich die entsprechende Geschwindigkeit v aus der Figur entnehmen.

Schließen die Geschwindigkeiten v_1 und v_2 den Winkel $\alpha = 0$ ein, liegen sie also in derselben Richtung, so ist $u = u_1 + u_2$. Die resultierende Geschwindigkeit folgt aus der Formel

$$\operatorname{th} u = \frac{\operatorname{th} u_1 + \operatorname{th} u_2}{1 + \operatorname{th} u_1 \operatorname{th} u_2},$$

oder

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}.$$

Die Resultante ist zwar kleiner als die Summe der Komponenten, aber sie wird doch dargestellt wie auch in der gewöhnlichen Mechanik durch eine Länge, welche der Summe der die Komponenten darstellenden Längen gleichkommt. Es ist nämlich in diesem Falle $U = U_1 + U_2$.

Mit dieser Festsetzung stimmt die Figur im sechsten Göttinger Vortrage Poincarés nicht überein[1]).

Komponiert man zwei gleiche Geschwindigkeiten, denen die Länge U_1 entspricht, so wird die Resultante durch die Länge $2U_1$ repräsentiert.

2. Lorentz-Einsteinsche Transformation als Translation.

Nehmen wir diese Transformation in der Form, die ich ihr gegeben habe[2]),

$$\left.\begin{aligned} l' &= -x \operatorname{sh} u + l \operatorname{ch} u, \\ x' &= x \operatorname{ch} u - l \operatorname{sh} u, \\ y' &= y, \quad z' = z. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Die Veränderlichen x, y, z, l fasse ich als homogene Weierstraßsche Koordinaten im Lobatschefskijschen dreidimensionalen Raume auf. Sind X, Y, Z Lobatschefskijsche rechtwinklige Koordinaten, ξ, η, ζ die vom Punkte M auf die Ebenen des rechtwinkligen Koordinatensystems gefällten Lote und r die Entfernung jenes Punktes vom Koordinatenanfang, so erhält man aus der leicht zu entwerfenden Figur folgende Gleichungen

$$x = \operatorname{sh} \xi = \operatorname{sh} X \operatorname{ch} Y \operatorname{ch} Z, \tag{5}$$

$$y = \operatorname{sh} \eta = \operatorname{sh} Y \operatorname{ch} Z, \tag{6}$$

$$z = \operatorname{sh} \zeta = \operatorname{sh} Z, \tag{7}$$

$$l = \operatorname{ch} r = \operatorname{ch} X \operatorname{ch} Y \operatorname{ch} Z. \tag{8}$$

Diese Weierstraßschen Koordinaten erfüllen, wie leicht ersichtlich, die quadratische Gleichung[3])

$$l^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 1. \tag{9}$$

Dies ist eben die Invariante erster Art der durch die Gleichungen (4), oder durch

$$Uf = -l \frac{\partial f}{\partial x} - x \frac{\partial f}{\partial l} \tag{10}$$

definierten Transformation.

Nimmt man

$$y = y' = c_1, \qquad z = z' = c_2, \tag{11}$$

so erhält man zwei Abstandsflächen[4])

1) H. Poincaré, Sechs Vorträge aus der reinen Mathematik und mathematischen Physik, 1910, S. 52.

2) Diese Zeitschr. 11, 93, 1910.

3) Für diese Koordinaten siehe Liebmann, Nichteuklidische Geometrie, S. 166, und Killing, Die nichteuklidischen Raumformen.

4) Allgemeine Gleichung der Abstandsfläche gab ich in einer Abhandlung im Rad jugoslavenske akademije 175, 215—240, 1908. Die Mittelebene war dabei bestimmt durch die Enden ξ, η und den Winkel α. Über diese Bestimmung der Ebene siehe meine Arbeit: Zur nichteuklidischen analytischen Geometrie in Atti del IV congresso dei matematici, Roma 1909, 2, 213—226.

$$\operatorname{sh} Y \operatorname{ch} Z = \operatorname{sh} c_1 \qquad (12)$$

und

$$Z = \operatorname{sh}^{-1} c_2 . \qquad (13)$$

Ihre Mittelebenen sind die Koordinatenebenen XZ und XY.

Die Lorentz-Einsteinsche Transformation läßt sich deuten als eine Translation längs der Durchschnittslinie dieser zwei äquidistanten Flächen.

Um die Sache zu vereinfachen, setzen wir $Z = 0$ und so werden die Weierstraßschen Koordinaten eines Punktes in der Ebene

$$\left.\begin{aligned} x &= \operatorname{sh} \xi = \operatorname{sh} X \operatorname{ch} Y, \\ y &= \operatorname{sh} \eta = \operatorname{sh} Y, \\ l &= \operatorname{ch} r = \operatorname{ch} X \operatorname{ch} Y. \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

Die Lorentz-Einsteinsche Transformation

$$\left.\begin{aligned} l' &= -x \operatorname{sh} u + l \operatorname{ch} u, \\ x' &= \quad x \operatorname{ch} u - l \operatorname{sh} u, \\ y' &= y, \quad z' = z = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

definiert eine Bewegung längs der Abstandslinie $Y = b$, welche die X-Achse zur Mittellinie hat. Der Parameter b ist beliebig.

Die Schiebung um die Strecke s längs dieser äquidistanten Linie ist bestimmt durch die Gleichungen[1])

$$X' = X - \frac{s}{\operatorname{ch} b}, \qquad Y' = Y. \qquad (16)$$

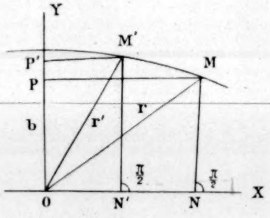


Fig. 2.

Hier ist s der Bogen MM' dieser Abstandslinie. Sei u seine Projektion NN' in die X-Achse, dann ist

$$X' = X - u, \qquad Y' = Y, \qquad (17)$$

also

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sh} X' &= \operatorname{sh} X \operatorname{ch} u - \operatorname{ch} X \operatorname{sh} u, \\ \operatorname{sh} Y' &= \operatorname{sh} Y. \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

Durch Multiplikation der ersten Gleichung mit

$$\operatorname{ch} Y' = \operatorname{ch} Y$$

erhält man

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sh} X' \operatorname{ch} Y' &= \operatorname{sh} X \operatorname{ch} Y \operatorname{ch} u - \operatorname{ch} X \operatorname{ch} Y \operatorname{sh} u \\ \operatorname{sh} Y' &= \operatorname{sh} Y. \end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

Nach der Fig. 2 ist es weiter

$$\operatorname{ch} OM' = \operatorname{ch} X' \operatorname{ch} Y', \qquad (20)$$

oder

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{ch} r' = \operatorname{ch}(X - u) \operatorname{ch} Y = {} & \operatorname{ch} X \operatorname{ch} Y \operatorname{ch} u \\ & - \operatorname{sh} X \operatorname{ch} Y \operatorname{sh} U. \end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

Berücksichtigt man die Gleichungen (14), so kann man (19) und (21) auf die Form

$$x' = x \operatorname{ch} u - l \operatorname{sh} u, \qquad y' = y,$$
$$l' = -x \operatorname{sh} u + l \operatorname{ch} u,$$

bringen und dies sind eben die Gleichungen (15) der Lorentz-Einsteinschen Transformation.

3. Die Ortszeit.

Sind in M und M' zwei Beobachter, die sich mit gleichförmigen, aber verschiedenen Geschwindigkeiten bewegen, so kann jeder der beiden mit genau dem nämlichen Rechte behaupten, daß er relativ zum leeren Raume ruht. Daß aber der Beobachter in M eine andere Zeitrechnung als der Beobachter in M' benutzt, ersieht man aus der obigen Figur, denn es ist r verschieden von r'. Der hyperbolische Kosinus vom Radiusvektor des Punktes, in dem sich der Beobachter befindet, ist nach unserer Festsetzung seine Ortszeit. Die Auffassung des neuen Zeitbegriffs[1]) wird durch diese Interpretation wesentlich erleichtert. Sie wirkt fast intuitiv. Es erübrigt nur noch, zu untersuchen, ob sie wohl dasselbe wird leisten können, was die einfache und sehr suggestive Minkowskische Koordinatentransformation vermag.

Der Punkt M kann jede Lage auf jener Abstandslinie einnehmen. Nehmen wir ihn so, daß u gleich seiner Abszisse wird, d. h. daß der Punkt M' in den Durchschnittspunkt der Abstandslinie mit der Ordinatenachse fällt oder verlegen wir den Koordinatenanfangspunkt nach

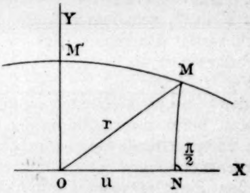


Fig. 3.

N'. Die durch eine gleichförmige Bewegung

1) Über die Transformationen der Lobatschefskijschen Ebene siehe meine diesbezüglichen Arbeiten im Rad jugoslavenske akademije **165**, 50—80, 236—244, 1906, oder den kurzen Auszug daraus im Jahresber. d. deutsch. Mathematikerver. **17**, 70—83, 1908.

1) Planck, Acht Vorlesungen über theoretische Physik, S. 117, sagt, daß diese neue Auffassung des Zeitbegriffs an Kühnheit alles übertrifft, was bisher in der spekulativen Naturforschung und philosophischen Erkenntnistheorie geleistet wurde; die nichteuklidische Geometrie, die bisher nur für die reine Mathematik in Betracht käme, wäre ein Kinderspiel dagegen.

von der Geschwindigkeit $\frac{c}{v} = \operatorname{th} u$ bedingte Raumzeittransformation wird dann durch die Weierstraßschen Koordinaten des Punktes M vollständig charakterisiert. Es ist $NN' = ON = u$ zu setzen. Dieser spezielle Fall, der in Fig. 3 dargestellt ist, führt uns dazu, die Zeiteinheit des Beobachters in einem bestimmten Punkte der Abstandslinie als hyperbolischen Kosinus seiner Lobatschefskijschen Abszisse zu nehmen.

Für die Beobachter in M und M' (Fig. 2) sind bezügliche Zeiteinheiten

$$\tau = \operatorname{ch} ON, \quad \tau' = \operatorname{ch} ON'. \tag{22}$$

Aus den rechtwinkligen Dreiecken OMN und $OM'N'$ ersehen wir, daß

$$\frac{\operatorname{ch} OM}{\operatorname{ch} ON} = \frac{\operatorname{ch} OM'}{\operatorname{ch} ON'} = \operatorname{ch} b$$

oder

$$\frac{l}{\tau} = \frac{l'}{\tau'} \tag{23}$$

konstant ist. Jene Beobachter sind also überzeugt, daß sich ihre Zeit bei der Bewegung nicht geändert hat. Diese Veränderung könnte nur ein in Ruhe sich befindlicher Beobachter konstatieren.

Nehmen wir den Beobachter M' wieder in dem Durchschnittspunkte der Abstandslinie mit der Ordinatenachse (Fig. 3), dann ist seine Zeiteinheit $\tau' = 1$, während die Zeiteinheit τ des Beobachters in M gleich $\operatorname{ch} u$ wird. Es ist also

$$\tau' = \frac{\tau}{\operatorname{ch} u}. \tag{24}$$

Die Formel (23) gibt

$$l' = \frac{l}{\operatorname{ch} u}, \tag{25}$$

und das ist das Resultat Einsteinscher Untersuchung[1]).

Das in der Formel (23) und Fig. 3 dargestellte Verhältnis wird gestört, wenn man eine Verschiebung des Koordinatenanfangspunktes auf der Ordinatenachse vornimmt. Die Linie MM' hört dann auf, eine Abstandslinie mit der Abszissenachse als Mittellinie zu sein. Die X_1-Achse nähert sich ihr immer mehr, schneidet sie und entfernt sich dann von ihr bis zur Unendlichkeit. Die X_2-Achse entfernt sich gleich von ihr. Die Linien X, X_1, X_2 haben die Ordinatenachse Y zum gemeinsamen Lote, gehen also in der Lobatschefskijschen Geometrie um so weiter auseinander, je weiter sie verlängert werden.

1) A. Einstein, Zur Elektrodynamik bewegter Körper. Ann. d. Phys. **17**, 904, 1905.

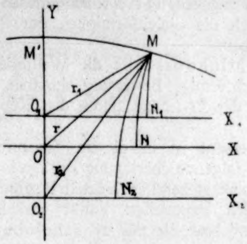


Fig. 4.

4. Die gleichförmige Bewegung.

Bei den Translationen längs den Abstandslinien zur X-Achse bleibt die Schar der Normalen zur X-Achse unverändert und umgekehrt; einzelne Normalen werden untereinander permutiert. Die Invarianten zweiter Art der infinitesimalen Transformation (10) sind diese Normalen

$$\omega(l, x) = \frac{l}{x} - \coth u = 0, \tag{26}$$

denn es ist

$$U(\omega) = -1 + \omega^2 = F(\omega).$$

In den Lobatschefskijschen rechtwinkligen Koordinaten ist die Gleichung der Normalen im Punkte $(u, 0)$

$$X = u. \tag{27}$$

Setzt man dies in die Formeln (14), so wird

$$x = \operatorname{sh} u \operatorname{ch} Y, \quad l = \operatorname{ch} u \operatorname{ch} Y,$$

und daraus erhält man sofort die Gleichung (26).

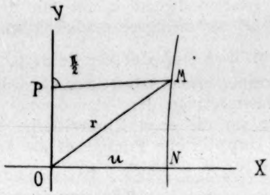


Fig. 5.

Bei gleichförmiger Bewegung ist das Verhältnis der Maßzahl des Weges zur Maßzahl der Zeit gleich der Maßzahl der Geschwindigkeit. Es ist also

$$x : \frac{\operatorname{ch} r}{\operatorname{ch} u} = \frac{v}{c},$$

oder

$$\frac{x}{l} = \operatorname{th} u.$$

Das Bild der gleichförmigen Bewegung ist die Normale zur X-Achse (Fig. 5). Durch die

in Fig. 4 angedeutete Koordinatentransformation wird auch die Gleichförmigkeit der Bewegung aufgehoben.

Bei Minkowski ist die Weltlinie, welche die gleichförmige Bewegung darstellt, die Gerade in der xt-Ebene durch den Koordinatenanfang.

Interessant ist in diesem Zusammenhange auch die folgende Überlegung Palagyis[1]): „Was wir in dem stehend gedachten Raume als den durch den materiellen Punkt zurückgelegten Weg betrachten, ist nur der scheinbare Weg, den der Punkt beschreibt; der wirkliche Weg aber ergibt sich durch Konstruktion des rechtwinkligen Parallelogrammes aus dem scheinbaren Wege und aus der verflossenen Zeit ... Dies mußte sich daraus ergeben, daß wir schon die Ruhe als eine gleichförmige Bewegung, und zwar als eine Bewegung in der subjektiven Dimension der Zeit auffaßten. Wir setzen also diese subjektive Komponente mit der objektiven Komponente, die durch den scheinbaren Weg gegeben ist, durch das Parallelogramm zusammen und erhielten so den wirklichen Weg, den der Punkt im fließenden Raume zurücklegt.

Dieser wirkliche Weg bildet mit dem Zeitstrahl einen Winkel φ, den ich den Zeitwinkel der gleichförmigen Bewegung nenne."

Die Geschwindigkeit drückt er durch die Tangente des Zeitwinkels φ aus.

Das Bild der beschleunigten Bewegung ist die Abstandslinie. Ihrem Durchschnitte mit der Ordinatenachse ordnen wir die relative Geschwindigkeit Null zu; in ihren übrigen Punkten ist

$$v = c \operatorname{th} X .$$

Die Geschwindigkeit wächst mit der Entfernung bis zur Lichtgeschwindigkeit an.

5. Das Dopplersche Prinzip.

In meiner ersten Arbeit über die nichteuklidische Interpretation der Relativtheorie[2]) transformierte ich die erste Einsteinsche Formel für das Dopplersche Prinzip auf die Form

$$\frac{\nu'}{\nu} = \frac{\operatorname{ch}(u_1 - u)}{\operatorname{ch} u_1}. \tag{28}$$

Nehmen wir zwei äquidistante Linien (Fig. 6) mit der X-Achse als gemeinsamen Mittellinie und mit den Parametern $OA = u_1$, $OA' = u_1 - u$. Die Bogen dieser zwei Abstandslinien, die von der Y-Achse und der Normalen zur X-Achse im Punkte C abgegrenzt werden, sind

$$AB = OC \operatorname{ch} u_1, \qquad A_1 B_1 = OC \operatorname{ch}(u_1 - u).$$

Es ist also

$$\frac{\nu'}{\nu} = \frac{A_1 B_1}{AB}. \tag{29}$$

1) Palagyi, Neue Theorie des Raumes und der Zeit, 1901, S. 45.

2) Diese Zeitschr. 11, 93, 1910.

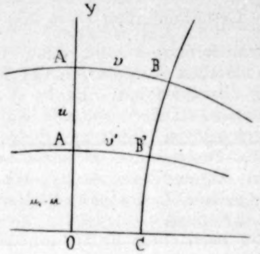


Fig. 6.

Das Verhältnis der Frequenzen ν' und ν läßt sich im allgemeinen Falle darstellen als das Verhältnis der Bogen zweier Abstandslinien zwischen gemeinsamen Normalen.

Für $\varphi = 0$ wird $u_1 = \infty$. Die Abstandslinien gehen in die Grenzkreise mit den gemeinsamen Achsen über, und es wird

$$\nu' = \nu e^{-u}. \tag{30}$$

Diesem Falle entspricht Fig. 7.

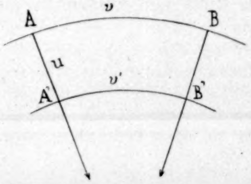


Fig. 7.

In der euklidischen Geometrie reduzieren sich die Abstandslinien und die Grenzkreise auf Parallelen zur gegebenen Geraden. Die Ausdrücke für das Dopplersche Prinzip in der gewöhnlichen Mechanik kann man leicht graphisch versinnlichen mittels der Abschnitte paralleler Transversalen zwischen den Schenkeln eines Winkels.

6. Die Aberration.

Der Lichtstrahl T treffe die X-Achse unter dem Winkel φ. Um die Richtung des abgelenkten Lichtstrahles zu finden, haben wir aus N eine Lobatschefskijsche Parallele zu T zu ziehen. Die Aberrationsgleichung ist

$$u_1' = u_1 - u. \tag{31}$$

Die Konstruktion der verlangten Parallele ist in Fig. 8 folgendermaßen ausgeführt[1]). Sei

1) Lobatschefskij-Engel, Zwei geometrische Abhandlungen, S. 256.

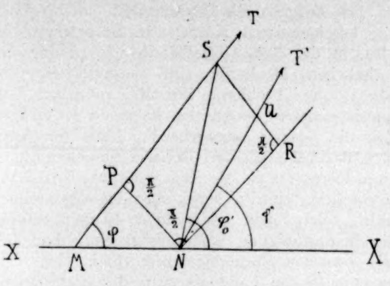


Fig. 8.

$MN = u = \operatorname{th}^{-1}\frac{v}{c}$. Wir fällen von N aus auf MT das Lot NP, errichten sodann auf NP in N das Lot NR, nehmen ferner auf MT die Strecke $MS = 1$ und fällen von S aus auf NR das Lot SR. Machen wir noch $NU = PS$, so wird NU parallel zu MT im Lobatschefskijschen Sinne, und diese Parallele schließt mit der X-Achse den Winkel φ' ein.

Da der Punkt U immer zwischen S und R zu liegen kommt, so ersieht man leicht aus der Figur, daß in der Relativtheorie φ' kleiner als φ_0' der gewöhnlichen Mechanik ist.

In der Einsteinschen Formel für die Aberration

$$\cos\varphi' = \frac{\cos\varphi - \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}\cos\varphi}, \tag{32}$$

drücken wir die auf der linken Seite und im Zähler des Bruches vorkommende Kosinusse durch entsprechende Sinusse aus, quadrieren dann und erhalten so nach einigen Umformungen

$$\sin\varphi' = \frac{\sin\varphi \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c}\cos\varphi}. \tag{33}$$

Bei der Bewegung der Erde in ihrer Bahn relativ zum Fixsternhimmel als Bezugssystem ist $\frac{v}{c} = 0{,}0001$[1]). Für solche kleine Geschwindigkeit kann man $\frac{v^2}{c^2}$ vernachlässigen, um dann

$$\sin\varphi_0' = \frac{\sin\varphi}{1 - \frac{v}{c}\cos\varphi} \tag{34}$$

zu erhalten. Die Formel (34) und die Formel (32), in der wir φ_0' statt φ_0 nehmen wollen, geben

$$\frac{\sin\varphi_0'}{\cos\varphi_0'} = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi - \frac{v}{c}}, \tag{35}$$

woraus man in Übereinstimmung mit der gewöhnlichen Theorie die Formel

$$\sin(\varphi_0' - \varphi) = \frac{v}{c}\sin\varphi_0' \tag{36}$$

leicht findet. Durch Vergleichen der Formeln (33) und (34) finden wir

$$\sin\varphi' = \frac{\sin\varphi_0'}{\operatorname{ch} u}. \tag{37}$$

Nimmt man in der Fig. 3 aber $OM' = u$, so kann man setzen

$$MM' = \sin\varphi_0', \qquad ON = \sin\varphi'. \tag{38}$$

Noch besser wäre, Fig. 1 in meiner ersten Mitteilung zu nehmen. Dann kann man nehmen

$$s = \sin\varphi_0', \qquad s' = \sin\varphi'. \tag{39}$$

7. Der Lichtdruck.

Die folgenden Bemerkungen beziehen sich auf Einsteinsche Formeln, die sich in § 8 seiner ersten Arbeit über das Relativitätsprinzip[1]) befinden. Man ersieht leicht, daß

$$\frac{E'}{E} = \frac{A'}{A} = \frac{\operatorname{ch}(u_1 - u)}{\operatorname{ch} u} \tag{40}$$

ist und dies kann man, wie früher $\frac{v'}{v}$, mittels der Fig. 6 interpretieren.

Für den Lichtdruck gibt Einstein die Formel

$$P = 2\frac{A^2}{8\pi}\frac{\left(\cos\varphi - \frac{v}{c}\right)^2}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}. \tag{41}$$

Wir transformieren sie zuerst auf die Form

$$P = 2\frac{A^2}{8\pi}(\operatorname{th} u_1 - \operatorname{th} u)^2 \cdot \operatorname{ch}^2 u,$$

woraus man leicht

$$P = \frac{2A^2}{8\pi}\left(\frac{\operatorname{sh}(u_1 - u)}{\operatorname{ch} u_1}\right)^2 \tag{42}$$

erhält.

Nehmen wir ein Lobatschefskijsches rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse $u_1 - u$ und einem spitzen Winkel $\alpha = \Pi(u_1)$, so erhalten wir für die dem Winkel α anliegende Kathete den Ausdruck

$$\operatorname{sh} b = \frac{\operatorname{sh}(u_1 - u)}{\operatorname{ch} u_1}, \tag{43}$$

und so wird

$$P = \frac{1}{4\pi}(A \operatorname{sh} b)^2. \tag{44}$$

Agram, 12. Februar 1910.

(Eingegangen 18. Februar 1910.)

1) Brill, Einführung in die Mechanik, 1909, S. 206.

1) Ann. d. Phys. 17, 913—915, 1905.

Gleichförmige Rotation und Lorentz-Kontraktion.

Von Max Planck.

In der Diskussion über eine in dieser Zeitschrift erschienene Notiz von P. Ehrenfest[1]), betitelt: „Gleichförmige Rotation starrer Körper und Relativitätstheorie", ist mir wiederholt die Auffassung begegnet, daß der von Herrn Ehrenfest betrachtete Fall: Die gleichförmige Rotation eines Körpers um eine feste Achse, eine Schwierigkeit für die Relativitätstheorie mit sich bringe. Es ist daher vielleicht nicht ganz überflüssig, wenn ich mit einigen Worten auf das Mißverständnis hinweise, das einer solchen Auffassung zugrunde liegt.

Der Satz, daß das Volumen eines mit der Geschwindigkeit q bewegten Körpers einem ruhenden Beobachter im Verhältnis $\sqrt{c^2-q^2}:c$ kleiner erscheint als einem mit der Geschwindigkeit q mitbewegten Beobachter, muß wohl unterschieden werden von dem anderen Satz, daß das Volumen eines Körpers sich im Verhältnis $\sqrt{c^2-q^2}:c$ verkleinert, wenn er von der Geschwindigkeit 0 auf die Geschwindigkeit q gebracht wird. Ersterer Satz ist eine der Grundforderungen der Relativitätstheorie, letzterer Satz aber ist unrichtig, wenigstens in dieser Allgemeinheit. Denn die Veränderung, die das Volumen eines Körperelements bei irgendeiner Zustandsänderung erfährt, ist stets wesentlich mit bedingt durch die äußeren Einwirkungen, die dabei auf seine Oberfläche ausgeübt werden, insbesondere von dem Verhalten des Druckes und von der Wärmezufuhr. Solange über diese Einwirkungen nichts bekannt ist, läßt sich über die Kontraktion des Volumens gar nichts aussagen. Am unmittelbarsten ist dies einzusehen bei leicht kompressibeln Körpern, wie bei Gasen; es gilt aber ebenso auch für feste Körper. Ein Körper, der ein „selbständiges", d. h. von äußeren Einwirkungen unabhängiges Volumen besitzt, existiert in der ganzen Natur nicht, und in der Relativitätstheorie noch weniger. Wenigstens scheint mir der Versuch, die für die gewöhnliche Mechanik so wichtige Abstraktion des starren Körpers auch für die Relativitätstheorie fruchtbar zu machen, keinen rechten Erfolg zu versprechen[2]).

Die Aufgabe, die Deformation eines irgendwie beschleunigten Körpers zu bestimmen, ist also, in der Relativitätstheorie wie in der gewöhnlichen Mechanik, im wesentlichen ein elastisches Problem. Für den speziellen Fall quasistationärer Translation habe ich vor einiger Zeit die Lösung angegeben[1]). Aus ihr folgt u. a., daß bei adiabatisch-isobarer Beschleunigung eines Körpers stets die oben genannte Lorentz-Kontraktion eintritt, sonst aber im allgemeinen nicht. Bei einem rotierenden Körper erfolgt die Beschleunigung jedenfalls nicht isobar für alle einzelnen Körperelemente; doch wird sich auch in diesem Falle die Aufgabe leicht lösen lassen, sobald das kinetische Potential der elastischen Deformationen bekannt ist. Bei der Aufsuchung des Ausdrucks für das kinetische Potential muß natürlich in erster Linie beachtet werden, daß diese Funktion, auf die Volumeneinheit bezogen, für alle Lorentz-Transformationen invariant ist.

1) Diese Zeitschr. **10**, 918, 1909.

2) In einer inzwischen veröffentlichten Notiz (diese Zeitschr. **11**, 233, 1910) beschränkt Herr M. Born die Definition der Starrheit auf ein einzelnes Elektron. Dagegen läßt sich gewiß von vornherein nichts einwenden. Ob man aber damit physikalisch weiter kommt als mit den allgemeinen Grundsätzen der Relativitätstheorie, dürfte wohl einstweilen sich jeder Prüfung entziehen. (Anmerkung bei der Korrektur.)

1) Ann. d. Phys. **26**, 24, 1908.

(Eingegangen 10. März 1910.)

Bestimmung des Weges der Erdbebenwellen im Erdinnern.

Von E. Wiechert und Ludwig Geiger.

I. Theoretisches.

Von E. Wiechert.

§ 1. Seismik als Mittel zur Erforschung des Erdinnern.

Zu den wichtigsten Problemen der Seismologie gehört die Ableitung des Weges der Erdbebenwellen im Innern der Erde aus der Art der Ausbreitung über die Erdoberfläche, denn es knüpft sich daran die Möglichkeit, über die elastische Beschaffenheit aller Erdschichten von der Oberfläche bis hinunter zum Mittelpunkt Aufschluß zu erhalten. Wenn wir die Blicke umher wandern lassen, zeigt sich leicht, daß keine andere uns bekannte Naturerscheinung es erlaubt, so weit ins einzelne zu gehen.

Die Abplattung der Erde, die Variationen der Schwerkraft auf ihr, Präzession und Nutation der Erdachse führen zwar zu Schlüssen über die Massenverteilung in der Erde, jedoch nur zu Schlüssen summarischer Natur. Man hat wohl speziellere Vorstellungen über die Massenanordnung ausgearbeitet; dieses war aber stets nur auf Grund unbeweisbarer Hypothesen möglich. So habe ich z. B. unter Verwertung der genannten Erscheinungen ge-

schlossen[1]), daß die Erde einen Metallkern vom spezifischen Gewicht 7,9—8,5 enthalte, der von einem Steinmantel vom spezifischen Gewicht 3,0—3,4 und der Dicke 1500—1800 km umgeben sei. Aber ich mußte von vornherein die Annahme machen, daß der Erdkörper aus einem Metallkern und einem Steinmantel bestehe, die beide im großen und ganzen gleichmäßige Dichte hätten, und ich mußte ferner annehmen, daß die Dichte des Steinmantels den uns bekannten Materialien entsprechend auf 3,0—3,4 zu schätzen sei: erst dann konnte aus den genannten Erscheinungen die Dicke des Steinmantels und Dichte des Metallkerns berechnet werden. Ich konnte später gute Gründe dafür anführen, daß 3,4 der wahrscheinlichste Wert für die Dichte des Steinmantels, und daher 8,4 der beste Wert für die Dichte des Metallkerns, 1500 km der beste Wert für die Dicke des Steinmantels seien. Aber eben nur die Wahrscheinlichkeit durfte behauptet werden, denn meine Überlegung stützte sich darauf, daß der Mond die mittlere Dichte 3,4 hat, der doch einst ein Teil der Erdrinde war, und der im großen und ganzen in seinem Innern heute etwa dieselben Temperaturverhältnisse haben muß, wie die Erdrinde.

Die Beobachtungen über die Variationen der Schwerkraft auf der Erde zeigen, daß die Schwerkraft sehr regelmäßig verteilt ist. Die verhältnismäßig geringen Störungen von Ort zu Ort lassen sich erklären durch Unregelmäßigkeiten in einer oberflächlichen Schicht, deren Dicke auf kaum 100 km zu schätzen ist (Hayford, Helmert). Für diese Rinde sind mancherlei für die Erdphysik bedeutsame Einzelheiten festgestellt worden, und vieles ist noch zu hoffen. Niemals aber wird man mittels der Schwerkraftmessungen die Lagerung der Massen im Innern der Erde, ja nicht einmal im Innern der Rinde von Ort zu Ort verfolgen können, denn die Fernwirkungen der Schwerkraft sind solcher Art, daß stets unendlich viele Anordnungen der Massen angegeben werden können, die nach außen hin gleiche Kräfte zur Folge haben.

Ganz ähnlich steht es um die erdmagnetischen Erscheinungen. Auch hier ist aus gleichen Gründen mittels der Beobachtungen auf der Erdoberfläche eine scharfe Lokalisierung des Sitzes der die Fernwirkung ausübenden Teile im Innern der Erde nicht möglich.

Durch Beobachtung der Ebbe und Flut, sowie der Lotschwankungen infolge des wechselnden Standes von Sonne und Mond und durch Beobachtung der Wanderung der Rotationsachse der Erde im Erdkörper („Polschwankungen") kann man auf die elastische Nachgiebigkeit der Erde schließen. Die Polschwankungen lehren aber nur eine Summenwirkung der elastischen Verschiebung der Erdteilchen gegeneinander infolge der wechselnden Zentrifugalkräfte kennen, die gemessen werden kann durch die Veränderung einer einzigen Konstante im Potential der Gravitation der Erdmasse. Nimmt man die Beobachtungen über Ebbe und Flut und die Lotschwankungen infolge des wechselnden Standes der Sonne und des Mondes hinzu, so erfährt man außer der Veränderung jener Konstante des Potentials der Gravitation auch die Veränderung der äußeren Gestalt der Erde unter der Einwirkung der Fernwirkung von Sonne und Mond, und so noch eine zweite Angabe über das elastische Verhalten der Erde. 2 Koeffizienten also ergeben sich im ganzen und weiter keine Einzelheiten. Es zeigt sich, daß die Erde im Vergleich mit dem uns bekannten elastischen Verhalten der Materialien unter gewöhnlichen Temperatur- und Druckverhältnissen elastisch sehr wenig nachgiebig ist, und daß die äußeren Teile erheblich nachgiebiger sind wie die inneren; es ist aber nicht möglich, Schlüsse auf die Nachgiebigkeit der Erdschichten im einzelnen zu machen, denn ähnlich wie bei der Gravitation und dem Erdmagnetismus hemmt der Umstand, daß unendlich viele verschiedene Verteilungen der Elastizität in der Erde angegeben werden können, welche den beiden beobachteten Koeffizienten gleich gut entsprechen.

Ganz anders steht es um die Erdbebenwellen. Durch ihre Beobachtung können wir wirklich lokalisieren, können wir die elastische Beschaffenheit des Erdinnern in den einzelnen Schichten und Ort für Ort in diesen bis herab zu den größten Tiefen erschließen. Der Umstand, daß die Erdbebenwellen durch den Erdkörper tatsächlich hindurchgehen, macht uns diesen gewissermaßen durchsichtig, erlaubt uns Außenstehenden sein Inneres zu durchforschen. Es darf wohl ausgesprochen werden, daß hierdurch die Seismologie für die Physik des festen Erdkörpers zu einer beherrschenden Stellung erhoben wird. Aber auch die reine Physik hat alle Ursache, lebhaft Anteil zu nehmen an diesem Ruhmestitel der Seismologie, denn es wird so die Möglichkeit geboten, das elastische Verhalten der Materie unter Drucken kennen zu lernen, die alles in menschlichen Versuchen Erreichbare weit übertreffen. In Laboratorien kann man wohl 10000 oder 20000, vielleicht einmal 40000 Atmosphären verwenden: Im Innern der Erde finden wir Drucke bis zu 3 Millionen Atmosphären!

1) E. Wiechert, Nachr. d. K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, Math.-phys. Kl. 1897, S. 221.

So hat denn das Problem, aus der Ausbreitung der Erdbebenwellen über die Erdoberfläche auf dem Weg im Innern der Erde und damit auf das elastische Verhalten des Erdinnern zu schließen, die Seismologen lebhaft beschäftigt, seit man (um 1890 herum) erkannte, daß die Erdbebenwellen in weite Fernen gehen. Das Problem war eine der Triebfedern, die bei dem Ausbau der großen, die Welt umspannenden Organisationen wirksam waren. Dem 6. internationalen Geographen-Kongreß (London 1895) wurde im Namen einer Reihe von Gelehrten ein von v. Rebeur-Paschwitz verfaßter Aufruf zum internationalen Zusammenschluß der seismologischen Arbeit vorgelegt, in dem es heißt:

„Die Bedeutung der hier in Vorschlag gebrachten Erdbebenbeobachtungen für die Physik der Erde läßt sich nicht hoch genug veranschlagen. Da es fast sicher ist, daß die von einem Erdbebenherde ausstrahlende elastische Bewegung sich durch den Erdkörper fortpflanzt, mit einer Geschwindigkeit, deren Größe von der Dichtigkeit und Elastizität der verschiedenen Tiefenschichten abhängen muß, und da sichere Anzeichen vorhanden sind, daß diese Geschwindigkeit mit der Tiefe, welche die Bewegung erreichte, veränderlich ist, so geben die Erdbebenbeobachtungen ein Mittel in die Hand, um auf indirektem Wege Aufschlüsse über den Zustand des Erdinnern zu erhalten, welches wohl für alle Zeiten den direkten Beobachtungen verschlossen sein wird".

Das Problem war auch in der Hauptsache der Anlaß dafür, daß in Göttingen in dem Geophysikalischen Institut eine seismische Station gegründet wurde, und daß 1903 von der Göttinger Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften in Apia (Samoa) bei der Einrichtung des dortigen geophysikalischen Observatoriums sogleich auch ein Seismometer aufgestellt wurde.

§ 2. Das Problem der Erdbebenstrahlen.

Für die seismische Forschung ergaben sich nun zwei Aufgaben: 1. die praktische, für ein brauchbares Beobachtungsmaterial zu sorgen, 2. die theoretische, die Beobachtungsergebnisse für die Schlüsse auf die Vorgänge unter der Erdoberfläche zu verwerten.

Die praktische Aufgabe kommt darauf hinaus, für die beiden Vorläufer (longitudinale und transversale Wellen) die „Laufzeitfunktion", das heißt die Beziehung festzustellen, welche auf der Erdoberfläche Herdentfernung und Laufzeit verbindet. Indem man an die übliche geometrische Darstellung in Koordinaten erinnert, wobei die Entfernung als Abszisse, die Laufzeit als Ordinate genommen wird, pflegt man wohl auch von der Bestimmung der „Laufzeitkurve" zu sprechen.

Laufzeitfunktionen wurden gegeben von J. Milne[1]), H. Benndorf[2]), R. D. Oldham[3]), Zöppritz und mir[4]). Milne stützt sich im wesentlichen auf die Beobachtungen mit den von ihm konstruierten Instrumenten. H. Benndorf nimmt weiteres Material hinzu, ebenso R. D. Oldham. Es schienen uns in Göttingen (Dr. Zöppritz und mir) aus zwei Gründen die Laufzeitbeobachtungen im allgemeinen sehr unzuverlässig: Erstens ist der Umstand leicht irreführend, daß in den entfernteren Stationen meist eine Reihe verschiedener und verschieden intensiver Wellenzüge nacheinander eintrifft (z. B. direkte und an der Erdoberfläche reflektierte Wellen); so kann es kommen, daß je nach der Art der Instrumente usw. der eine Beobachter den Beginn eines Wellenzuges und der andere den Beginn eines anderen Wellenzuges als den ersten Einsatz annimmt. Zweitens werden bei schwachen Anfängen oft genug vorher in den Registrierkurven auftretende Zacken, hervorgerufen durch Wind, mechanische Störungen, mikroseismische Bodenunruhe usw., schon zum Erdbeben gerechnet. Es schien uns daher unbedingt geboten, nur durchaus zuverlässiges Material, gegeben durch starke Beben mit scharfen Einsätzen, zur Ableitung der Laufzeiten heranzuziehen, wenn wir den Trugbildern entgehen wollten, die frühere Bearbeitungen verhängnisvoll gestört hatten. Wir fanden nicht mehr als drei Beben unseren Zwecken voll genügend, und mußten uns auf diese beschränken (ein Indisches von 1905, ein Kalabrisches von 1905 und ein Kalifornisches von 1906). Wir glaubten ferner uns dem Schluß nicht entziehen zu können, daß das damals vorliegende Material für Entfernungen über 13000 km jeder Sicherheit entbehrt. Die so 1906 entstandene („Göttinger") Laufzeitkurve ist weiter unten zugleich mit der Oldhamschen angegeben. Die Kurve für die ersten Vorläufer wurde von Dr. Zöppritz und mir gemeinsam, die der zweiten Vorläufer von Dr. Zöppritz allein aufgestellt. Seit jener Zeit ist neues Material in Fülle hinzugekommen. Schon für den Vortrag auf der Naturforscherversammlung in Dresden (Sept. 1907) konnte ich weitere Ergebnisse für die Laufzeitkurve jenseits 13000 km verwerten, und zurzeit sind

1) J. Milne, Nature **67**, 1903, April 9.

2) H. Benndorf, K. Akad. d. Wiss. in Wien, Mittlgn. d. Erdbeben-Komm., Heft 29 u. 31, 1905 u. 1906.

3) R. D. Oldham, Geological Soc. **62**, 456, 1906.

4) E. Wiechert u. K. Zöppritz, Über Erdbebenwellen. Nachr. d. K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, Math.-phys. Kl., 1907, S. 415; K. Zöppritz u. L. Geiger, ebenda, 1909, S. 400.

Dr. Angenheister, Dr. Geiger und ich damit beschäftigt, eine zweite „Göttinger Laufzeitkurve" aufzustellen. Die vorliegende Arbeit gehört zu den Vorbereitungen dazu.

Für den theoretischen Teil der großen Aufgabe der Seismik mußte zunächst die Theorie der Bewegung der Erdbebenwellen (des Strahlenganges) im Innern der Erde ausgearbeitet werden. Eine Reihe von Autoren widmeten sich ihr, so Aug. Schmidt[1]), M. P. Rudtzki[2]), W. Laska[3]), H. Benndorf[4]), v. Kövesligethy[5]) und ich[6]). Vorausgesetzt werden von allen Autoren die gleichen Gesetze, wie sie für den Schall und das Licht gelten. Man nimmt also entweder an, daß die Strahlen (womit die Normallinien der Wellenflächen gemeint sind) Wege kürzester Ankunftszeiten seien (Fermatsches Prinzip), oder, was auf dasselbe hinaus kommt, man benutzt die Huygenssche Konstruktion, um die Ablenkung der Strahlen zu bestimmen.

Das eigentliche Problem, die wirkliche Bestimmung der Strahlenwege im Erdinnern aus den Beobachtungen der Wellen auf der Erdoberfläche, zeigte mathematische Schwierigkeiten, die man zunächst durch indirekte Methoden zu umgehen suchte: Man machte Annahmen über die Verteilung der Geschwindigkeit in den Erdschichten und variierte sie so, bis den Beobachtungen möglichst entsprochen wurde. Milne (l. c.) nahm einfach einen inneren Kern und einen Mantel an, in welchen beiden die Geschwindigkeit konstant sein sollte, so daß nur an der Zwischengrenze eine Brechung, sonst geradliniger Verlauf der Strahlen angenommen wurde. Aus den Beobachtungen schloß er auf eine Dicke des Mantels von etwa 500 km, also auf eine erheblich geringere Dicke, als ich sie für den Steinmantel aus astronomischen Gründen gefolgert hatte. Zur Erklärung des scheinbaren Widerspruches wäre anzunehmen, daß der Steinmantel nicht einheitlich gebaut sei, und daß in dem tiefer liegenden Teil die Erdbebenwellen etwa ebenso schnell wie in dem Metallkern laufen. Benndorf (l. c), der bei der Diskussion die Theorie zu Hilfe nahm, schließt aus Beobachtungen ebenfalls, daß etwa in 500 km eine Zunahme der Geschwindigkeit stattfinde, daß aber die Geschwindigkeit dann noch weiter steige. Oldham (l. c.) beschränkt sich ohne Rücksicht auf die genauere Theorie auf Vergleiche der scheinbaren Geschwindigkeiten längs der Sehne. Er findet, daß die Geschwindigkeit zunimmt, je tiefer die Sehne zu liegen kommt, anfänglich schneller, später langsamer. Für die Gebiete auf der Erdoberfläche jenseits 90° vom Herd glaubt er erkennen zu können, daß nur die ersten Vorläufer (d. h. die longitudinalen oder Dilatationswellen) sich in regelmäßiger Weise ausbreiten, daß dagegen die zweiten Vorläufer (d. h. die transversalen oder Scherungswellen) in ungefähr 130° Entfernung vom Herd plötzlich eine erhebliche Verspätung um mehrere Minuten erfahren. Er schließt daraus, daß in der Tiefe ein Kern von etwa $^4/_{10}$ der äußeren Dimensionen der Erde eingebettet sei, wo die Scherungselastizität (im Gegensatze zu der Dilatationselastizität) sehr bedeutend geringer ist als sonst (die Geschwindigkeit soll auf etwa $^1/_2$ herabgehen).

v. Kövesligethy (l. c.) macht über die Geschwindigkeitsverteilung im Erdinnern Annahmen, die zu besonders einfachen Formeln führen; es wird eine überall stetige Änderung vorausgesetzt.

§ 3. Indirekte Methode von E. Wiechert und Resultate.

In der zitierten Arbeit „Über Erdbebenwellen" habe ich eine Methode ausgearbeitet, um aus der Laufzeitfunktion auf den Weg der Strahlen im Innern der Erde durch Rechnung (oder Zeichnung) zu schließen, die dann sogleich von Dr. Zöppritz und mir auf die „Göttinger Laufzeitfunktion" angewandt wurde. Auch diese Methode arbeitet indirekt, sie erlaubt es aber, den Weg der Erdbebenstrahlen im Erdinnern mit jeder gewünschten Schärfe festzustellen. Nur der Grundgedanke soll hier angegeben werden. Man denkt sich die Erde in eine Reihe von Schichten zerteilt. Diese Schichten werden von den Erdbebenstrahlen in wechselnder Krümmung durchlaufen werden, und es wird auch angenommen werden müssen, daß in jeder einzelnen Schicht der Krümmungsradius eines jeden Strahles in verschiedener Tiefe verschieden ist. Auf diese Variation innerhalb einer jeden einzelnen der Schicht wird nun aber nicht geachtet: das ist der wesentliche Kunstgriff meiner Methode. Man sieht, es handelt sich um ein Näherungsverfahren, bei dem die Vernachlässigungen in den zweiten Differentialquotienten der Bahnkurven liegen; die Genauigkeit wächst mit der Anzahl der angenommenen Schichten und kann jeden gewünschten Grad erreichen.

Um die Konstanz der Bahnkrümmung in

1) Aug. Schmidt, Verein f. vaterl. Naturkunde in Württemberg, 1888, S. 249.
2) M. P. Rudtzki, Gerlands Beitr. z. Geophys. III, 1898, S. 495.
3) W. Laska, K. Akad. d. Wiss. in Wien, Mittlg. d. Erdbeben-Komm., Heft 23, 1904.
4) H. Benndorf, l. c.
5) v. Kövesligethy, Seismonomia. Modena 1906.
6) In der schon zitierten, teils von mir, teils von Zöppritz verfaßten Arbeit.

den einzelnen Schichten zu erzielen, muß angenommen werden, daß in den Schichten bestimmte einfache Beziehungen zwischen der Strahlgeschwindigkeit und dem Abstand vom Erdmittelpunkt gelten, und zwar zeigt es sich, daß die anzunehmende Bedingung differential geschrieben so lautet:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} = -f, \qquad (1)$$

wobei r der Abstand vom Erdmittelpunkt, v die Strahlgeschwindigkeit (d. h. Normalgeschwindigkeit der Wellen), f eine Konstante ist. Integral geschrieben kann die Bedingung folgende Form erhalten:

$$v = -\frac{f}{2}r^2 + F, \qquad (2)$$

wobei F eine zweite zu f hinzutretende Konstante für die Schicht bedeutet. Die Methode stellt also für jede Schicht zwei Konstanten zur Verfügung. Von dieser ist die eine, F, so zu wählen, daß die Geschwindigkeit beim Übergang von der nächst vorhergehenden Schicht keinen Sprung erleidet; die andere Konstante, f, bestimmt dann die Änderung der Geschwindigkeit in der Schicht. Der Verwertung von (1) und (2) liegt das bemerkenswerte Gesetz zugrunde, daß in einem Gebiet im Innern einer Kugel, in welchem die Beziehungen (1) und (2) gelten, alle Strahlen in Kreisbahnen verlaufen[1]).

Wie die Methode anzuwenden ist, werden folgende kurze Bemerkungen hinreichend deutlich machen.

Je weiter vom Herd die Erdbebenwellen auf der Erdoberfläche beobachtet werden, um so tiefer sind die zugehörigen Strahlen (Normallinien der Wellenflächen) auf ihrem Wege in die Erde hinabgegangen, um so mehr der angenommenen Schichten haben sie also durchlaufen. Wenn man also vom Herd aus allmählich in die Ferne geht, wird anfänglich nur die erste, dann auch die zweite, dann die dritte und so fort der Schichten in Wirkung treten. Man geht nun auch mit der Rechnung entsprechend vorwärts. Aus den Beobachtungen in der Nähe des Herdes schließt man zunächst auf die Konstanten F und f der ersten Schicht. Dann kann der Verlauf aller Strahlen durch diese Schicht berechnet werden. Aus dem Verlauf der Strahlen, welche die erste Schicht zwar überschreiten, aber ihr doch nahe bleiben, schließt man auf F und f für die zweite Schicht, und in dieser Weise geht es weiter. Die Dicke der Schichten wählt man jedesmal passend so, daß die Beobachtungen auf der Erdoberfläche mit den bis dahin angenommenen Konstanten genügend genau dargestellt werden.

1) W. Laska, l. c.

Es zeigte sich bei den Rechnungen von Dr. Zöppritz und mir, daß schon die Annahme verhältnismäßig weniger Schichten genügte, um die Beobachtungen befriedigend wieder zu geben. Bis zu rund 1500 km Tiefe waren zwei Schichten hinreichend. In dieser Tiefe ergab sich eine jähe Änderung in dem Verhalten der Wellengeschwindigkeit: Während diese bis dahin schnell und ziemlich gleichmäßig anstieg (bei den ersten Vorläufern von 7,2 bis 12,8 km/sec, bei den zweiten Vorläufern von 4 bis 6,77 km/sec), ergibt sich für größere Tiefen die Geschwindigkeit nahezu konstant. Wir konnten damals (Ende 1906) nicht einmal sicher feststellen, ob nach innen zu eine Zunahme oder eine Abnahme der Geschwindigkeit anzunehmen sei. Später (1907) erkannten wir aus dem neu hinzutretenden (hauptsächlich durch Apia gelieferten) Beobachtungsmaterial, daß nach innen zu eine erhebliche Abnahme der Geschwindigkeit erfolge. Darüber berichtete ich auf der Naturforscherversammlung in Dresden (September 1907, siehe den unten zitierten Vortrag). Ob diese Abnahme allmählich oder in der Hauptsache an Unstetigkeitsflächen plötzlich erfolgt, muß dahingestellt bleiben.

Es war für mich gegeben, in der plötzlichen Änderung des Geschwindigkeitsganges in 1500 km Tiefe die Grenze des aus astronomischen Beobachtungen gefolgerten Steinmantels gegen den inneren Metallkern zu sehen. Andeutungen einer Zweiteilung des Steinmantels, wie es den Laufzeitkurven von Milne und Benndorf entsprochen hätte, konnten Zöppritz und ich nicht finden. Es ist von sehr großem Interesse zu bemerken, daß später Dr. Geiger aus dem Studium der Seismogramme zu dem Schluß geführt worden ist, daß in etwa 1000 km Tiefe die Erdschichten eine Besonderheit zeigen müssen: Diejenigen Strahlen, nämlich der ersten und zweiten Vorläufer, die hier streifend verlaufen (d. h. ihre tiefste Einsenkung haben), werden fast völlig ausgelöscht. Dr. Geiger wird demnächst selbst darüber berichten, hier bringe ich mit seiner Erlaubnis nur kurz die erste Nachricht. Ob in 1000 km Tiefe sich doch vielleicht auch in dem Verhalten der Geschwindigkeit der Wellen eine Änderung zeigt, wollen wir bei den aufgenommenen Arbeiten versuchen festzustellen.

Auffällig schien, daß beim Übergang aus dem Steinmantel in den Metallkern eine Änderung der Geschwindigkeit sich nicht bemerkbar machen sollte. Ich habe diesem Punkt besondere Aufmerksamkeit geschenkt — und in der Arbeit über „Erdbebenwellen" ist eine ausführliche Diskussion gegeben —: aus den bisher vorliegenden Beobachtungen aber vermochte ich keine Anzeichen für eine Unstetigkeit in einem oder dem andern Sinn finden. Trotzdem könnte

eine Unstetigkeit im Betrage von einigen Prozenten, selbst 10, recht wohl vorhanden sein. Wäre die Wellengeschwindigkeit im Metallkern an der Grenze kleiner als im Steinmantel, so müßte eine Schattenzone sich zeigen, jenseits derer erst die durch den Kern gegangenen Wellen auftauchten. Diese Schattenzone würde aber bei einem nur geringen Unterschied der Geschwindigkeit, selbst wenn eine scharfe Unstetigkeitsfläche vorhanden sein sollte, infolge der Beugung der Wellen aufgefüllt. Sie würde noch mehr verwischt, wenn statt einer Unstetigkeitsfläche eine Vermengungszone vorhanden wäre, in der Gesteine und Metalle durcheinander gemischt lägen. Die einzelnen Brocken könnten dabei verhältnismäßig recht grob sein, ohne daß eine merkliche Schwächung der Wellen infolge diffuser Zerstreuung einträte. Die in Betracht kommenden Wellenlängen der Erdbebenstrahlen betragen nämlich 20 bis 100 km und von dieser Größenordnung dürften daher die Brocken sein. Wäre gemäß dem zweiten der beiden möglichen Fälle die Geschwindigkeit im Metallkern an der Grenze größer als im Steinmantel, so gäbe es eine Zone, wo zugleich Wellen einträfen, die nur durch den Steinmantel und solche, die auch durch den Metallkern gegangen wären. Aber eine Trennung der verschiedenen Wellen bereitet bei dem in den Seismogrammen meist vorhandenen Gewirre von Schwingungen große Schwierigkeiten, und das um so mehr, da auch hier die Beugung und eine etwa vorhandene Vermengungszone verwischend einwirken würden.

Immerhin darf aus den Beobachtungen geschlossen werden, daß beim Übergang vom Steinmantel zum Metallkern kein großer Sprung in der Geschwindigkeit der Wellen vorhanden ist. Ist das nicht ein bedenklicher Einwand gegen die Annahme einer solchen Grenze überhaupt? Ich glaube nicht! Es ist eine nach meinem Empfinden recht bemerkenswerte Erscheinung, daß zwar Dichte und Elastizität bei den verschiedenen Substanzen stark verschieden sind, die Geschwindigkeit der elastischen Wellen aber trotzdem nur verhältnismäßig wenig variiert. Es zeigen zum Beispiel Aluminium, Eisen, Nickel, Glas, Feuerstein, Quarz bis auf einige Prozente dieselben Geschwindigkeiten. In Platin, Silber, Marmor, wo wir geringe Geschwindigkeiten antreffen, erreichen sie doch etwa $^6/_{10}$ des Wertes in jenen Materialien.

So möchte ich denn nicht darin etwas Auffälliges erblicken, daß beim Übergang vom Steinmantel zum Metallkern sich nach den bisherigen Beobachtungen kein Sprung bemerkbar machte, wohl aber scheint es mir bedeutungsvoll, daß im Steinmantel selbst ein sehr regelmäßiges, starkes Ansteigen der Geschwindigkeit nach innen zu sich zeigt, und daß demgegenüber im Metallkern plötzlich nur geringe Änderungen der Geschwindigkeit stattfinden. Sollte ein Einfluß der Temperatur sich hier äußern, die nach innen zu im Steinmantel schnell anwächst, um dann im Metallkern wegen dessen viel besserer Leitfähigkeit nahezu konstant zu sein? Spielt der Druck mit, der an der Grenze des Steinmantels schon etwa $^1/_2$ Million Atmosphären erreicht? Träfe dies zu, so müßte angenommen werden, daß der Druck auf das Gestein wesentlich anders wirkt, wie auf das Metall, denn im Metallkern wächst der Druck noch schnell weiter: im Erdmittelpunkt steigt er auf rund 3 Millionen Atmosphären.

Sehr bemerkenswert vom physikalischen Standpunkt ist weiter noch die Folgerung aus den Laufzeitkurven von Zöppritz und mir, daß das Verhältnis der Geschwindigkeit der longitudinalen und transversalen Wellen im Innern der Erde sich nur wenig ändert. Es ergibt sich mit ziemlicher Annäherung überall das Verhältnis, welches der Querkontraktion $= ^1/_4$ bei Längsdehnung entspricht: Hieraus scheint zu folgen, daß die Atome selbst unter dem hohen Druck im Innern der Erde sich nahe wie elastische Kugeln verhalten[1]).

§ 4. Anwendung der Abelschen Integralgleichung. Satz von Herglotz.

Die in der modernen Mathematik zu großer Bedeutung gelangten sogenannten „Integralgleichungen" haben eine direkte Methode zutage gefördert, um aus den Laufzeitbeobachtungen auf den Weg der Erdbebenstrahlen zu schließen. Es kommt dabei gerade jene Integralgleichung und ihre Lösung von Abel in Betracht, die für die Entwicklung der Theorie der Integralgleichungen besondere Wichtigkeit erlangt hat.

Unter solchen Umständen wird es nicht wundernehmen, daß die Lösung der seismischen Aufgabe zweimal unabhängig gegeben wurde, von G. Herglotz[2]) und von H. Bateman[3]). Man versteht es auch, daß der Mathematiker Bateman es übersehen konnte, daß die Lösung schon drei Jahre früher in eben der Zeitschrift (die vorliegende nämlich) gegeben wurde, in der er selbst seine Arbeit in deutscher Übersetzung drucken ließ. (Auch meine Arbeit wird übrigens von Herrn Bateman in einer Weise zitiert,

1) E. Wiechert, Die Erdbebenforschung. Ges. Deutscher Naturforscher u. Ärzte, Verh. 1907, diese Zeitschr. 9, 36, 1908.
2) G. Herglotz, diese Zeitschr. 8, 145, 1907.
3) H. Bateman, diese Zeitschr. 11, 96, 1910.

die mich annehmen läßt, er habe sie nicht gelesen). Als Göttinger sei mir erlaubt noch zu bemerken, daß es recht interessant erscheint, daß die beiden jungen Gelehrten die Einführung in die Theorie der Integralgleichungen am gleichen Ort, eben in Göttingen, fanden. Die Arbeit von Herglotz fällt in seine Göttinger Zeit.

Mit Rücksicht auf unsere hiesigen Pläne, neue Laufzeitfunktionen zu konstruieren, habe ich die durch die Abelsche Integralgleichung gegebene Lösung des seismischen Problems meinerseits durchgearbeitet, und gefunden, daß sie in eine für die praktische Arbeit sehr bequeme Form gebracht werden kann. Davon soll im folgenden berichtet werden. Herr Geiger hat es übernommen, die Formeln auf die Göttinger und die Oldhamschen Laufzeitfunktionen anzuwenden.

Bei der Aufstellung der Formeln scheint es vorteilhaft, nochmals bis zur Abelschen Integralgleichung zurückzugehen, also die Arbeiten von Herglotz und Bateman nicht direkt zu benutzen.

Die „Integralgleichung" einfachster („erster") Art im modernen Sinn hat die Form:

$$f(x) = \int_a^x K(x, \xi)\, u(\xi)\, d\xi . \tag{3}$$

$f(x)$, $K(x, \xi)$, $u(\xi)$ sind Funktionen bezüglich von x, x, ξ und ξ; a ist eine Konstante. K ist eine gegebene Funktion und heißt (nach Hilbert) „Kern" der Gleichung. Unter „Auflösung" von (3) versteht man die Bestimmung der Funktion u, wenn die Funktion f gegeben ist. — Die „Abelsche Integralgleichung" lautet[1]):

$$f(x) = \int_x^a \frac{u(\xi)}{(\xi - x)^\lambda}\, d\xi , \tag{4}$$

wobei λ eine Konstante ist, deren Wert zwischen o und 1 liegt. Es ist also hier der Kern

$$K(x, \xi) = \frac{1}{(\xi - x)^\lambda} . \tag{5}$$

Die Lösung von (4) lautet nach Abel:

$$u(\xi) = \frac{\sin \lambda \pi}{\pi} \frac{d}{d\xi} \int_\xi^a \frac{f(x)}{(x - \xi)^{1-\lambda}}\, dx . \tag{6}$$

Entsprechend dem Ersatz von x durch $a - x$, ξ durch $a - \xi$ kann man in den Differenzen $\xi - x$ und $x - \xi$ die beiden Größen x und ξ gegeneinander vertauschen, es sind dann auch in den beiden Integralen die Grenzwerte zu vertauschen.

Abel wurde auf (4) geführt durch Behandlung des reibungslosen Falles eines Körpers auf einer Kurve. Dabei erhielt λ den Wert von $^1/_2$. Eben derselbe Wert kommt für das seismische Problem in Betracht. —

Nennen wir Δ den Abstand vom Herd, gemessen längs der Erdoberfläche, T die Laufzeit vom Herdpunkt (den wir in der Erdoberfläche annehmen) bis zum Punkt im Abstand Δ, $\mathfrak{V}$ die „Oberflächengeschwindigkeit" der Wellen, so ist

$$\mathfrak{V} = \frac{d\Delta}{dT} . \tag{7}$$

Dabei gilt aus geometrischen Gründen die sogleich ersichtliche Beziehung

$$\sin \bar{i} = \frac{\bar{v}}{\mathfrak{V}} = \frac{\mathfrak{V}_0}{\mathfrak{V}} , \tag{8}$$

(Benndorfscher Satz). i bedeutet die Neigung des Strahles (als „Strahl" gilt die Wellennormale) gegen die Vertikale, also gegen den Radiusvektor vom Erdmittelpunkt, v ist die Wellengeschwindigkeit oder Strahlgeschwindigkeit, das heißt die Normalgeschwindigkeit, mit der die Erdbebenwellen sich im Innern der Erde fortpflanzen. $\bar{i}$ und $\bar{v}$ sind die speziell an der Erdoberfläche geltenden Werte, so daß also $\bar{i}$ den Austrittswinkel des Strahles bezeichnet. $90^0 - \bar{i}$ pflegt man in der Seismik „Emergenzwinkel" zu nennen. $\mathfrak{V}_0$ ist der Wert von $\mathfrak{V}$ für $\Delta = 0$, also der Anfangswert von $\mathfrak{V}$ beim Herd. Da hier $\bar{i} = 90^0$ ist, gilt:

$$\left(\frac{d\Delta}{dT}\right)_{\Delta=0} = \mathfrak{V}_0 = \bar{v} . \tag{9}$$

Die Gleichung eines Erdbebenstrahles im Innern der Erde (zugleich eines Lichtstrahles in der Atmosphäre) lautet:

$$\frac{r}{v} \sin i = c . \tag{10}$$

Es bedeuten hierbei r die Entfernung vom Erdmittelpunkt, i und v die zugehörigen Werte der Strahlneigung und der Wellengeschwindigkeit, c eine Konstante, die dem Strahl charakteristisch ist. Bezeichnet, wie vorhin, ein Strich über dem Symbol den betreffenden Wert für die Erdoberfläche, und sind r_u, v_u, i_u die Werte im tiefsten Punkt des Strahles (im Scheitelpunkt), so ist nach (10):

$$c = \frac{\bar{r}}{\bar{v}} \sin \bar{i} = \frac{r_u}{v_u} . \tag{11}$$

Berücksichtigt man (8), so folgt auch:

$$\frac{r_u}{v_u} = \frac{\bar{r}}{\mathfrak{V}} . \tag{12}$$

Die Beobachtungen liefern T als Funktion von Δ; es wird so [durch (7)] die Oberflächengeschwindigkeit $\mathfrak{V}$ bestimmt. Mit $\mathfrak{V}_0 = \bar{v}$ als Grenzwert von $\mathfrak{V}$ für $\Delta = 0$ ist gemäß (8) dann weiter auch $\sin \bar{i}$ als Funktion von Δ gegeben.

1) Ich schließe mich an M. Bôcher, Introduction to the Study of Integral Equations, Cambridge 1909.

Je größer die Entfernung $\varDelta$ vom Herd ist, um so steiler gegen die Erdoberfläche verlaufen die Strahlen, um so kleiner ist also i. Um so tiefer sind die Strahlen dann auch in die Erde eingedrungen, um so kleiner ist also auch r_u. So sind stets bestimmte Werte von $\varDelta$, $\mathfrak{V}$ und r_u einander zugeordnet. Der Wert der Oberflächengeschwindigkeit $\mathfrak{V}$, der zur Austrittsstelle eines Strahles mit der tiefsten Einsenkung r gehört, soll mit $\mathfrak{V}_r$ bezeichnet werden. Es ist dann nach (12), wobei r_u und v_u durch r und v, $\mathfrak{V}$ durch $\mathfrak{V}_r$ zu ersetzen sind:

$$\mathfrak{V}_r = \frac{\bar{r}}{r} v. \tag{13}$$

Da v eine bestimmte Funktion von r ist, stellt sich $\mathfrak{V}_r$ ebenfalls als Funktion von r dar. Die Strahlgleichung (10) kann nun auch so geschrieben werden:

$$\sin i_r = \frac{\mathfrak{V}_r}{\mathfrak{V}_\varDelta}. \tag{14}$$

i_r ist die Neigung i des Strahles im Niveau r, $\mathfrak{V}_\varDelta$ bedeutet die Oberflächengeschwindigkeit der Wellen an der Austrittstelle des Strahles, $\mathfrak{V}_r$ ist definiert durch (13) und bedeutet zugleich die Geschwindigkeit $\mathfrak{V}_\varDelta$ für einen Strahl, der im Niveau r seinen tiefsten Punkt erreicht.

Unsere Aufgabe soll es nun sein, r_u als Funktion von $\varDelta$ darzustellen. Um dahin zu gelangen, verfolgen wir den Weg eines Strahles. Dabei wird die eben definierte Größe $\mathfrak{V}_r$ die Oberflächenpunkte mit den in den Tiefen liegenden Punkten verbinden und so in den Mittelpunkt der Überlegungen rücken. Wir können in der Tat unsere Aufgabe auch darin erblicken, den Zusammenhang von r und $\varDelta$ festzustellen, der sich mittels (13) ergibt, wenn $\mathfrak{V}_r = \mathfrak{V}_\varDelta$ gesetzt wird.

Ist ds ein Längenelement des Strahles, so folgt, da i_r die Neigung gegen den Radius r darstellt: $ds \cos i_r = dr$, $ds \sin i_r = r\,d\Theta$. Es wird dabei mit Θ der Winkel von r gegen den Radiusvektor nach dem Herd bezeichnet. Durch Elimination von ds ergibt sich:

$$d\Theta = \frac{dr}{r} \operatorname{tg} i_r, \tag{15}$$

und bei Benutzung von (14):

$$d\Theta = +\frac{dr}{r} \frac{(1/\mathfrak{V}_\varDelta)}{\sqrt{(1/\mathfrak{V}_r)^2 - (1/\mathfrak{V}_\varDelta)^2}}. \tag{16}$$

$\mathfrak{V}_\varDelta$ ist hier eine durch $\varDelta$ bestimmte Konstante, nämlich die Oberflächengeschwindigkeit an der Austrittstelle des Strahles, $\mathfrak{V}_r$ bedeutet eine Variable, die mit r durch die Gleichung (13) verbunden ist. Für den tiefsten Punkt des Strahles, für den $r = r_\varDelta$ gesetzt werden mag, ist $\mathfrak{V}_r = \mathfrak{V}_\varDelta$ für die Oberfläche ($r = \bar{r}$) hat $\mathfrak{V}_r$ den Wert $\bar{v} = (\mathfrak{V}_\varDelta)_{\varDelta=0}$.

Da der Strahl um den tiefsten Punkt symmetrisch verläuft, entspricht die Änderung von Θ vom tiefsten Punkt bis zur Oberfläche der halben Entfernung $\varDelta$, d. h. dem Winkel $\varDelta/2\bar{r}$. Es ist daher:

$$\frac{\varDelta}{2\bar{r}} = \frac{1}{\mathfrak{V}_\varDelta} \int\limits_{\mathfrak{V}_r = \mathfrak{V}_\varDelta,\ r = r_\varDelta}^{\mathfrak{V}_r = \bar{v},\ r = \bar{r}} \frac{d \lg \operatorname{nat} r}{\sqrt{(1/\mathfrak{V}_r)^2 - (1/\mathfrak{V}_\varDelta)^2}}. \tag{17}$$

Setzen wir jetzt

$$(1/\mathfrak{V}_r)^2 = \xi, \quad (1/\mathfrak{V}_\varDelta)^2 = x, \tag{18}$$

so geht (17) über in

$$\frac{\varDelta \mathfrak{V}_\varDelta}{2\bar{r}} = \int\limits_{x}^{(1/\bar{v})^2} \frac{\frac{d}{d\xi}(\lg \operatorname{nat} r)}{\sqrt{\xi - x}}\, d\xi, \tag{19}$$

also in die Abelsche Gleichung für $\lambda = {}^1/_2$. Bei Vergleich von (19) mit (4) erhalten wir durch (6) die Lösung:

$$\frac{d}{d\xi}(\lg \operatorname{nat} r) = \frac{1}{2\bar{r}\pi} \frac{d}{d\xi} \int\limits_{\xi}^{(1/\bar{v})^2} \frac{\varDelta \mathfrak{V}_\varDelta}{\sqrt{x - \xi}}\, dx, \tag{20}$$

und durch Integration nach ξ ergibt sich sofort:

$$\lg \operatorname{nat} \frac{\bar{r}}{r} = \frac{1}{2\bar{r}\pi} \int\limits_{\xi}^{(1/\bar{v})^2} \frac{\varDelta \mathfrak{V}_\varDelta}{\sqrt{x - \xi}}\, dx. \tag{21}$$

Rechts und links müssen hier zusammengehörige Werte von r und $\xi = (1/\mathfrak{V}_r)^2 = \left(\frac{r}{\bar{r} v}\right)^2$ stehen. $\mathfrak{V}_r$ bedeutet also denjenigen Wert von $\mathfrak{V}$, der einem Strahl mit der tiefsten Einsenkung r zugehört. Weiter ist $x = (1/\mathfrak{V}_\varDelta)^2$. Für die Grenze $x = (1/\bar{v})^2$ ist $\mathfrak{V}_\varDelta = \bar{v}$, $\varDelta = 0$, für die Grenze $x = \xi$ erreicht $\varDelta$ den zu $\mathfrak{V}_r$ gehörigen Wert, stellt also diejenige Entfernung dar, in welcher der Strahl wieder zur Oberfläche kommt, der in der Tiefe r erreichte. Bezeichnen wir diesen Wert mit $\varDelta_r$, so kann (21) geschrieben werden:

$$\left.\begin{aligned} \lg \operatorname{nat} \frac{\bar{r}}{r} &= \frac{1}{2\bar{r}\pi} \int\limits_{\varDelta = \varDelta_r}^{\varDelta = 0} \frac{\varDelta \mathfrak{V}_\varDelta\, d\left(\frac{1}{\mathfrak{V}_\varDelta}\right)^2}{\sqrt{(1/\mathfrak{V}_\varDelta)^2 - (1/\mathfrak{V}_r)^2}} \\ &= -\frac{1}{\bar{r}\pi} \int\limits_{\varDelta = 0}^{\varDelta = \varDelta_r} \frac{\varDelta \cdot d\left(\frac{\mathfrak{V}_r}{\mathfrak{V}_\varDelta}\right)}{\sqrt{\left(\frac{\mathfrak{V}_r}{\mathfrak{V}_\varDelta}\right)^2 - 1}}. \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Dies ist die gesuchte Darstellung der Tiefe r eines Strahles als Funktion der Entfernung $\varDelta_r$, in der er wieder an der Oberfläche auftaucht.

$\mathfrak{V}_\varDelta$ kann als Funktion von $\varDelta$ angesehen werden, gegeben durch (7), $\mathfrak{V}_r$ ist der zu $\varDelta_r$ (und also zu r) gehörige Grenzwert von $\mathfrak{V}_\varDelta$.

Der Zusammenhang von (22) mit den von Herglotz und Bateman gegebenen Lösungen ist so leicht zu erkennen, daß es nicht nötig scheint, darauf näher einzugehen. Da Herglotz der erste war, welcher die Lösung angab, wird man (22) den Satz von Herglotz nennen können.

§ 5. Direkte Methode zur Lösung des Problems der Erdbebenstrahlen.

Uns bleibt nun noch die Aufgabe, die Formel (22) in eine für praktische Rechnungen günstige Form zu bringen.

Zu dem Zweck schreibe ich:

$$\frac{\mathfrak{V}_r}{\mathfrak{V}_\varDelta} = p, \tag{23}$$

dann geht (22) über in:

$$\left.\begin{aligned} \lg \operatorname{nat} \frac{\bar r}{r} &= -\frac{1}{\pi \bar r}\int_{\varDelta=0}^{\varDelta=\varDelta_r} \frac{\varDelta\, dp}{\sqrt{p^2-1}} \\ &= -\frac{1}{\pi \bar r}\int_{\varDelta=0}^{\varDelta=\varDelta_r} \varDelta\, d \operatorname{arc} \mathfrak{Cos}\, p, \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

und es folgt durch partielle Integration:

$$\left.\begin{aligned} \lg \operatorname{nat} \frac{\bar r}{r} &= -\left[\frac{\varDelta}{\pi \bar r} \operatorname{arc} \mathfrak{Cos}\, p\right]_{\varDelta=0}^{\varDelta=\varDelta_r} \\ &\quad + \frac{1}{\pi \bar r}\int_{\varDelta=0}^{\varDelta=\varDelta_r} \operatorname{arc} \mathfrak{Cos}\, p\, d\varDelta. \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Für die untere Grenze des ersten Gliedes der rechten Seite ist $\varDelta = 0$, für die obere verschwindet wegen $p = 1$ der arc $\mathfrak{Cos}$, also fällt das Glied überhaupt fort. Setzen wir noch

$$\mathfrak{Cos}\, q = \frac{e^q + e^{-q}}{2} = p = \frac{\mathfrak{V}_r}{\mathfrak{V}_\varDelta} = \frac{(\sin \bar i)_\varDelta}{(\sin \bar i)_r}, \tag{26}$$

so geht (25) über in:

$$\lg \operatorname{nat} \frac{\bar r}{r} = \frac{1}{\pi \bar r}\int_{\varDelta=0}^{\varDelta=\varDelta_r} q\, d\varDelta. \tag{27}$$

In (26), (27) haben wir für praktische Rechnungen ganz außerordentlich einfache Formeln erhalten, denn es gibt Tabellen für die hyperbolische Kosinusfunktion, so daß der Wert des Integrals durch mechanische Quadratur leicht zu bestimmen ist. Dabei ist noch zu beachten, daß die Formeln (26), (27) zusammen mit den nach (7) und (13) geltenden Formeln

$$\mathfrak{V} = \frac{d\varDelta}{dT}, \tag{28}$$

$$v = \frac{r}{\bar r}\mathfrak{V}_r \tag{29}$$

alles umfassen, was der Rechner überhaupt der Theorie zu entlehnen braucht. — So mögen hier die Bezeichnungen kurz noch einmal erklärt werden: $\varDelta$ ist die Entfernung vom Herd, gemessen längs der Erdoberfläche, T die zugehörige Laufzeit, $\mathfrak{V}$ die Oberflächengeschwindigkeit, $\mathfrak{V}_\varDelta$ ist eine Bezeichnung von $\mathfrak{V}$, in der die Zugehörigkeit zu $\varDelta$ besonders hervorgehoben wird. r bedeutet den Abstand vom Erdmittelpunkt, v die dort herrschende Strahlgeschwindigkeit (Normalgeschwindigkeit der Wellen). $\bar r$ ist der Erdradius, also gibt $\pi \bar r = 20000$ km den Wert von $\varDelta$ für den Gegenpunkt des Herdes an. Der Endwert $\varDelta_r$ in (27), wozu $\mathfrak{V}_r$ als Wert von $\mathfrak{V}$ gehört, ist diejenige Entfernung $\varDelta$, in der ein Strahl auftaucht, der in der Entfernung r vom Erdmittelpunkt seine größte Tiefe erreichte. —

Bei der Anwendung der Formeln (26) bis (29) wird man so vorgehen: Aus der „Laufzeitfunktion“ oder „Laufzeitkurve“, die T als Funktion von $\varDelta$ darstellt, berechnet oder konstruiert man sich zunächst für eine genügende Anzahl von Werten $\varDelta$ die Oberflächengeschwindigkeiten $\mathfrak{V}$ und stellt eine Tabelle oder Kurve dar, welche $\mathfrak{V}$ als Funktion von $\varDelta$ zeigt. Die so gewonnene „Geschwindigkeitsfunktion“ oder „Geschwindigkeitskurve“ der Erdbebenwellen an der Erdoberfläche dient für die weitere Arbeit als eigentlicher Ausgangspunkt. Ist die Funktion richtig gebildet, so muß man mittels ihr durch mechanische Quadratur rückwärts die Laufzeitfunktion wieder richtig erhalten. Diese Kontrolle darf nicht versäumt werden. — Gedenkt man mit Logarithmen zu rechnen, so wird man noch die Funktion log $\mathfrak{V}$ darstellen.

Um bei einem vorgegebenen Wert der Entfernung $\varDelta$, den wir $\varDelta_r$ nennen, den zum tiefsten Punkt des Strahles gehörigen Wert des Erdradius r zu finden, wird für eine Reihe von Werten $\varDelta$ von $\varDelta = 0$ bis $\varDelta = \varDelta_r$ die Oberflächengeschwindigkeit $\mathfrak{V}_\varDelta$ aufgesucht, der Endwert für $\varDelta = \varDelta_r$ heißt $\mathfrak{V}_r$. Man bildet nun (z. B. mit der Rechenmaschine oder bei geringeren Ansprüchen an die Genauigkeit mit dem Rechenschieber) die Quotienten

$$\frac{\mathfrak{V}_r}{\mathfrak{V}_\varDelta} = \mathfrak{Cos}\, q, \tag{30}$$

oder, wenn man mit Logarithmen rechnet, die Differenzen

$$\log \mathfrak{V}_r - \log \mathfrak{V}_\varDelta = \log \mathfrak{Cos}\, q, \tag{31}$$

und sucht in den Tabellen für $\mathfrak{Cos}\, q$ oder für $\log \mathfrak{Cos}\, q$ Werte von q auf. Dann kann (27) zur Berechnung von $\lg(\bar r / r)$ mittels der mechanischen Quadratur benutzt werden.

Über die mechanische Quadratur bringt Herr

Dr. Geiger in dem nachfolgenden Paragraphen 7 nähere Angaben. —

Ist der zu Δ_r gehörige Wert von $\bar{r}/r$ gefunden, so kann mittels (29) auch sogleich die in der Tiefe r herrschende Strahlgeschwindigkeit v berechnet werden. —

Auch die Berechnung des Weges der einzelnen Strahlen kann man bei Zuhilfenahme der mechanischen Quadratur sehr leicht ausführen.

Als Vorbereitung dazu dient die besprochene Berechnung von $\lg \text{nat} (\bar{r}/r)$. Wird dieser Ausdruck für eine Reihe von vorgesehenen Werten der Entfernung Δ berechnet, und bezeichnen wir wieder wie bisher die betreffenden Werte von Δ und $\mathfrak{V}$ mit Δ_r und $\mathfrak{V}_r$, um so die Zugehörigkeit zu kennzeichnen, so ist auch $\mathfrak{V}_r$, definiert nach (13) durch:

$$\mathfrak{V}_r = \frac{\bar{r}}{r} v, \qquad (32)$$

als Funktion von $\log \text{nat} (\bar{r}/r)$ bekannt. Diese Funktion wird in einer Tabelle oder Kurve für die weitere Arbeit bequem dargestellt. Für $r = \bar{r}$ wird $\mathfrak{V}_r = \bar{v} = \mathfrak{V}_0 =$ der Oberflächengeschwindigkeit der Wellen für $\Delta = 0$.

Die Strahlgleichung für einen Strahl, der in der Entfernung Δ vom Herd wieder auftaucht, ist nach (14):

$$\sin i_r = \frac{\mathfrak{V}_r}{\mathfrak{V}_\Delta}, \qquad (33)$$

wobei i_r den Neigungswinkel des Strahles in dem Niveau r und $\mathfrak{V}_\Delta$ die Oberflächengeschwindigkeit der Wellen in der Entfernung Δ vom Herd bedeuten. Bezeichnen wir wieder den Winkel zwischen den beiden Radiusvektoren nach einem Strahlpunkt und nach dem Herd mit Θ, so ist nach (15):

$$\Theta_1 = -\int_{r=\bar{r}}^{r=r_1} \operatorname{tg} i_r d \lg \text{nat} \frac{\bar{r}}{r}. \qquad (34)$$

Θ_1 bedeutet hier den Winkel Θ, welcher in dem Niveau $r = r_1$ erreicht ist. Diese Formel in Verbindung mit (33) ermöglicht eine einfache Berechnung von Θ_1. Sie wird nur unbequem für die nächste Umgebung des Umkehrpunktes des Strahles, wo $\mathfrak{V}_r = \mathfrak{V}_\Delta$ und daher $\operatorname{tg} i_r = \infty$ wird. Aber dieser Ausfall schadet nichts, da ja für den Strahl die ganze Ausweitung (in Winkelmaß $= \Delta/\bar{r}$) und der tiefste Punkt bekannt sind.

§ 6. Besondere Fälle.

A. v. Kövesligethy (l. c.) nimmt für das Erdinnere an:

$$\left(\frac{\bar{v}}{v}\right)^2 = \frac{1 + \mathfrak{q}\left(\frac{\bar{r}}{r}\right)^2}{1 + \mathfrak{q}}, \qquad (35)$$

wobei v wie bisher die Wellengeschwindigkeit im Abstand r vom Erdmittelpunkt bedeutet und $\mathfrak{q}$ eine Konstante ist. Soll v nach dem Innern der Erde hin wachsen, wie es der Erfahrung entspricht, so muß $\mathfrak{q}$ positiv sein. Das soll im folgenden angenommen werden. v. Kövesligethy gelangt zu Formel (35), indem er das Rochesche Dichtegesetz für das Erdinnere

$$\delta = \bar{\delta} \frac{1 - \alpha\left(\frac{r}{\bar{r}}\right)^2}{1 - \alpha} \qquad (36)$$

zusammenfügt mit der aus der Optik entlehnten Formel:

$$\frac{1}{\delta}\left(\left(\frac{v'}{v}\right)^2 - 1\right) = C, \qquad (37)$$

in der v' und C Konstanten darstellen.

Aus (35) ergibt sich nach v. Kövesligethy für die Laufzeitfunktion:

$$T = \frac{1}{\mathfrak{V}_0} \frac{\psi + (1 + 2\mathfrak{q}) \mathfrak{Tg}\, \psi}{\sqrt{4\mathfrak{q}(1 + \mathfrak{q})}}. \qquad (38)$$

Hierin ist ψ gegeben durch:

$$\mathfrak{Cof}\, \psi = +\sqrt{1 + 2\mathfrak{q} + \mathfrak{q}^2 \cos^2 \frac{\Delta}{\bar{r}}} - \mathfrak{q} \cos \frac{\Delta}{\bar{r}}, \qquad (39)$$

und es sind $\mathfrak{Cof}$ und $\mathfrak{Tg}$ die hyperbolischen Funktionen:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{Cof}\, \psi = \frac{e^\psi + e^{-\psi}}{2}, \quad \mathfrak{Sin}\, \psi = \frac{e^\psi - e^{-\psi}}{2}, \\ \mathfrak{Tg}\, \psi = \frac{e^\psi - e^{-\psi}}{e^\psi + e^{-\psi}}. \end{aligned}\right\} \qquad (40)$$

$\mathfrak{V}_0 = \bar{v}$ bedeutet die Oberflächengeschwindigkeit für den Herdabstand $\Delta = 0$. Austrittswinkel $\bar{i}$ und Oberflächengeschwindigkeit $\mathfrak{V}$ werden bestimmt durch:

$$\sin \bar{i} = \frac{\mathfrak{V}_0}{\mathfrak{V}} = \frac{\bar{v}}{\mathfrak{V}} = \sqrt{\frac{\mathfrak{q}}{1 + \mathfrak{q}} \frac{\sin \frac{\Delta}{\bar{r}}}{\mathfrak{Sin}\, \psi}}. \qquad (41)$$

B. Ich selbst (l. c.) setzte für die Ausarbeitung meiner Näherungsmethode wie Laska (l. c.):

$$v = -\frac{f}{2} r^2 + F; \qquad (42)$$

es werden dann die Bahnen aller Strahlen Kreise, und es folgt, wenn man (42) für alle Tiefen der Erde als gültig ansieht:

$$\left(\frac{v}{\bar{v}} - 1\right) = \bar{r}^2 \frac{f}{2}\left(1 - \left(\frac{r}{\bar{r}}\right)^2\right). \qquad (43)$$

Wie ich in meiner Arbeit zeigte, ergibt sich weiter:

$$\operatorname{ctg} \bar{i} \operatorname{ctg} \frac{\Delta}{2\bar{r}} = C, \quad C = 1 + \frac{\bar{r} f}{\bar{v}}. \qquad (44)$$

Hieraus folgt sogleich:

$$\sin \bar{i} = \frac{\mathfrak{V}_0}{\mathfrak{V}} = \frac{\bar{v}}{\mathfrak{V}} = \frac{1}{\sqrt{1 + C^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\Delta}{2\bar{r}}}}, \qquad (45)$$

und wegen $dT = d\Delta/\mathfrak{B}$ durch Integration:

$$\mathfrak{Sin}\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{C^2-1}\,\frac{\mathfrak{B}_0}{r\pi}T\right) = \sqrt{C^2-1}\,\sin\frac{\Delta}{2r}, \quad (46)$$

wodurch die Laufzeitfunktion in einer für die Rechnung bequemen Form gegeben ist.

C. In seiner neuen Arbeit verwendet Bateman die Laufzeitfunktion

$$T = l + m\Delta - n\Delta^2, \quad (47)$$

wobei l, m, n Konstanten sind. Es ergibt sich hier schon für $\Delta = 0$ eine von 0 verschiedene Laufzeit $T = l$. Da Bateman für dieses eigenartige Verhalten keine Erklärung gibt, mag es dahingestellt bleiben, ob man an eine endliche Herdtiefe (die aber, da $l = 0{,}4$ Minuten angenommen wird, etwa 200 km betragen müßte) oder an Unregelmäßigkeiten in den obersten Erdschichten denken soll. l könnte auch in den früher angegebenen Formeln hinzugenommen werden, da aber diese Konstante für das Erdinnere keine Bedeutung hat, auch in den weiteren Batemanschen Formeln nicht eingeht, mag sie beiseite gelassen werden. Dann tritt an Stelle von (47):

$$T = m\Delta - n\Delta^2, \quad (48)$$

und es ergibt sich

$$\sin\bar{i} = \frac{\mathfrak{B}_0}{\mathfrak{B}} = \frac{\bar{v}}{\mathfrak{B}} = \bar{v}\,m\left(1 - 2\frac{n}{m}\Delta\right), \quad (49)$$

ferner mittels (22) für die tiefste Stelle eines Strahles, der auftaucht, wo der Wert $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_r$ herrscht:

$$\lg\text{nat}\,\frac{\bar{r}}{r} = \frac{1}{r\pi}\,\frac{m}{2n}\,q - \sqrt{1 - \left(\frac{\mathfrak{B}_0}{\mathfrak{B}_r}\right)^2}, \quad (50)$$

dabei ist q gegeben durch

$$\mathfrak{Cof}\,q = \frac{\mathfrak{B}_r}{\mathfrak{B}_0}. \quad (51)$$

Unter Rücksicht auf (32):

$$v = \frac{r}{\bar{r}}\,\mathfrak{B}_r \quad (52)$$

kann sogleich der zu r gehörige Wert der Wellengeschwindigkeit v bestimmt werden.

D. Wenn wir von der Batemanschen Konstanten l absehen, haben wir es überall mit zweikonstantigen Laufzeitfunktionen zu tun. Es ist von vornherein zu erwarten, daß derartig einfache Funktionen der Wirklichkeit nicht entsprechen werden, da das ja einen einheitlichen Bau einfachster Art des Erdkörpers voraussetzen würde; und es spricht weiter die Erfahrung gegen eine solche Annahme. Dennoch können die erhaltenen Formeln für manche Zwecke (etwa für Berechnungen, die sich auf geringe Entfernungen vom Herd beziehen) von Nutzen sein. Es ist nicht schwierig, noch mehr Konstanten so einzuführen, daß doch alle Rechnungen in geschlossenen Formeln durchführbar bleiben. So kann man z. B. setzen:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\Delta}{r\pi} = \alpha\left(1 - \frac{\mathfrak{B}_0}{\mathfrak{B}}\right) + \beta\left(1 - \left(\frac{\mathfrak{B}_0}{\mathfrak{B}}\right)^2\right)\\ + \gamma\left(1 - \left(\frac{\mathfrak{B}_0}{\mathfrak{B}}\right)^3\right),\end{aligned}\right\} \quad (53)$$

womit eine Verallgemeinerung der Batemanschen Formel erreicht wird, und es ist in (53) auch erlaubt, die Reihe rechts beliebig weit fortzusetzen, wenn man sich weiterhin auf ungerade Potenzen von $\frac{\mathfrak{B}_0}{\mathfrak{B}}$ beschränkt. Ebenso könnte man auch für den Zusammenhang von lg nat r und $\frac{\mathfrak{B}_0}{\mathfrak{B}_r}$ Potenzreihen nach $\frac{\mathfrak{B}_0}{\mathfrak{B}_r}$ annehmen (denen ein Glied lg nat $\left(\frac{\mathfrak{B}_0}{\mathfrak{B}_r}\right)$ zuzufügen wäre). Alle solche Ausführungen aber haben für die Praxis wenig Bedeutung, da sie das Wesentliche, das individuelle Verhalten der verschiedenen Erdschichten verwischen. Um die Individualität hervortreten zu lassen, bleiben die beiden Wege: Entweder man zerteilt, indirekt vorgehend wie bei der von mir ausgearbeiteten Näherungsmethode, die Erde für die Rechnung in einzelne Schichten, von denen jede für sich besonders behandelt wird, oder man verzichtet auf jede spezielle Formel und läßt in einem direkten Verfahren allein die in § 4 dargelegte allgemeine Theorie sprechen, wendet also mechanische Integrationen an. Auch die Zerteilung der Erde in Schichten bedeutet nichts anderes als eine mechanische Integration in besonderer Form, so daß in dieser Hinsicht beide Wege gleiche Mittel anwenden.

II. Praktische Rechnungen.

Von Ludwig Geiger.

Vorbemerkung.

Im folgenden soll die oben in § 5 entwickelte Methode auf zwei verschiedene Laufzeitfunktionen angewandt werden, nämlich auf diejenige der ersten Vorläufer, die Wiechert und Zöppritz 1906 aufgestellt haben[1]) und diejenige von Oldham aus dem gleichen Jahre[2]). Die erstere Laufzeitfunktion ist schon früher nach der ersten rechnerischen Methode Wiecherts[3]) von Zöppritz und Geiger durchgerechnet worden[4]), während Oldhams Funktion bisher noch nicht behandelt worden ist. Im ersten Fall werden wir also keine prinzipiell neuen Resultate zu erwarten haben, dagegen

1) E. Wiechert und K. Zöppritz, l. c.
2) R. D. Oldham, l. c.
3) l. c. § 23 und 24.
4) K. Zöppritz und L. Geiger, l. c.

erlauben die Unterschiede der Resultate beider Methoden, sich ein Urteil über die Qualität der Methoden und ihrer Resultate zu bilden. Die Resultate des zweiten Falles sind neu; sie und diejenigen von Benndorf[1]) und Bateman[2]) verglichen mit denjenigen des ersten Falles lassen erkennen, welch gewaltige Diskrepanzen zurzeit leider noch bestehen und wie wichtig deshalb ein weiteres äußerst sorgfältiges Studium der Laufzeitfunktion ist.

§ 7. Laufzeitfunktion von Wiechert-Zöppritz.

Wiechert und Zöppritz haben ihre Laufzeitfunktion und die durch Differentiation daraus hergeleitete Sinusfunktion graphisch[3]) und tabellarisch[4]) für beide Vorläufer mitgeteilt. Der Vollständigkeit halber lassen wir hier die beiden Funktionen tabellarisch folgen (Tabelle 1). Die

Tabelle 1. Laufzeit, Oberflächengeschwindigkeit und Einfallswinkel.

Δ in Megametern	I. Vorläufer			II. Vorläufer		
	T sec	$\mathfrak{V}$ km/sec	sin i	T sec	$\mathfrak{V}$ km/sec	sin i
0	0	7,174	1,0000	0	4,01	1,0000
0,5	69	7,30	0,9827	124	4,08	0,9827
1	136	7,66	0,9354	244	4,28	0,9354
1,5	199	8,25	0,8693	356	4,61	0,8693
2	257	9,01	0,7960	460	5,04	0,7960
2,5	310	9,92	0,7233	555	5,54	0,7233
3	358	10,95	0,6554	641	6,12	0,6554
3,5	402	12,0	0,5980	719	6,75	0,5941
4	442	13,1	0,5477	789	7,43	0,5398
4,5	478	14,3	0,4997	854	8,16	0,4916
5	512	15,7	0,4570	913	8,62	0,4653
5,5	542	16,8	0,4274	971	8,67	0,4624
6	572	16,85	0,4260	1028	8,77	0,4571
6,5	601	17,0	0,4228	1084	8,96	0,4527
7	631	17,2	0,4179	1140	9,00	0,4455
7,5	660	17,45	0,4116	1194	9,16	0,4379
8	688	17,8	0,4037	1249	8,35	0,4289
8,5	716	18,2	0,3948	1301	9,57	0,4190
9	743	18,65	0,3847	1354	9,83	0,4082
9,5	769	19,2	0,3737	1404	10,13	0,3958
10	795	19,85	0,3616	1453	10,47	0,3830
10,5	820	20,6	0,3492	1500	10,87	0,3689
11	844	21,4	0,3356	1545	11,31	0,3545
11,5	867	22,3	0,3210	1588	11,83	0,3384
12	888	23,5	0,3053	1629	12,46	0,3220
12,5	909	24,8	0,2893	1668	13,16	0,3048
13	929	26,2	0,2732	1705	13,94	0,2875

erste Spalte gibt die längs der Erdoberfläche gemessene Herddistanz Δ in Megametern (1 Megameter = 1000 km), die 2. und 5. die zugehörige Laufzeit T in Sekunden, die 3. und 6. die in km/sec gemessene Oberflächengeschwindigkeit $\mathfrak{V}$, und die 4. und 7. den Sinus des Einfallswinkels i der Erdbebenstrahlen; dabei ist der Einfallswinkel i wie in der Optik der Winkel zwischen Strahl und Wellennormale, hier also zwischen Erdbebenstrahl und Erdradius. Das erste Ziel der Rechnung besteht nun darin, daß man für eine diskrete Anzahl von Strahlen den „Scheitelradius“ berechnet. „Scheitel“ nennen wir den tiefsten Punkt des Strahles, der zugleich seine Mitte ist, „Scheitelradius“ r und „Scheiteltiefe“ $S = \bar{r} - r$ den Abstand des Scheitels vom Erdmittelpunkt bzw. von der Erdoberfläche. Nach § 5 dienen uns dazu die Gleichungen

$$\log \text{nat} \frac{\bar{r}}{r} = \frac{1}{20} \int q \, d\Delta, \tag{27}$$

worin Δ in Megametern gemessen ist, und

$$\mathfrak{Cof}\, q = \frac{\mathfrak{V}_r}{\mathfrak{V}_\Delta} = \frac{\sin i_\Delta}{\sin i_r}. \tag{26}$$

Man bildet also zunächst für jeden Strahl die Quotienten $\frac{\mathfrak{V}_r}{\mathfrak{V}_\Delta}$ oder, wenn Sinus $i(\Delta)$ fertig vorliegt, $\frac{\sin i_\Delta}{\sin i_r}$. Darin ist $\sin i_r$ der Einfallswinkel des betrachteten Strahles an der Erdoberfläche, $\mathfrak{V}_r$ die zugehörige Oberflächengeschwindigkeit, während $\sin i_\Delta$ bzw. $\mathfrak{V}_\Delta$ die entsprechenden Werte aller derjenigen Strahlen sind, deren Herddistanzen Δ zwischen der Distanz des betrachteten Strahles und $\Delta = 0$ liegen. Streng genommen müßte man also unendlich viele Werte $\sin i_\Delta$ bzw. $\mathfrak{V}_\Delta$ in Rechnung ziehen. Es hat sich jedoch gezeigt, daß zur Erreichung der gewünschten Genauigkeit eine ziemlich kleine Anzahl von Werten genügt, und zwar um so weniger, je geschickter sie ausgewählt werden. Dabei muß die Tabelle 1 graphisch sorgfältig interpoliert werden. Nachdem so die $\mathfrak{Cof}\, q$ berechnet sind, schlägt man die zugehörigen Werte q in einer Tabelle auf[1]), und hat damit q als Funktion von Δ. Fig. 1 zeigt graphisch $q(\Delta)$ für die Strahlen mit $\Delta = 1, 2, 3, \ldots 12, 13$ Megametern; außerdem ist $\Delta = 5{,}4$ Megameter angegeben, weil an dieser Stelle die Sinusfunktion einen Knick zeigt. Dieser Knick kommt auch in allen $q(\Delta)$ für $\Delta > 5{,}4$ Megameter zum Ausdruck.

Jetzt sind die Flächenintegrale $\int q \, d\Delta$ auszuwerten. Dazu verfügen wir über drei Gruppen von Methoden, nämlich die mechanische (Planimeter, Wägung), die rechnerische (Simpsonsche Regel, Modifikation derselben von Runge) und die graphische Integration.

1) H. Benndorf, l. c.
2) H. Bateman, l. c.
3) l. c. Tafel I und III.
4) K. Zöppritz und L. Geiger, l. c.

1) z. B. „Hyperbolic functions“ der Smithsonian mathematical tables, Washington 1909.

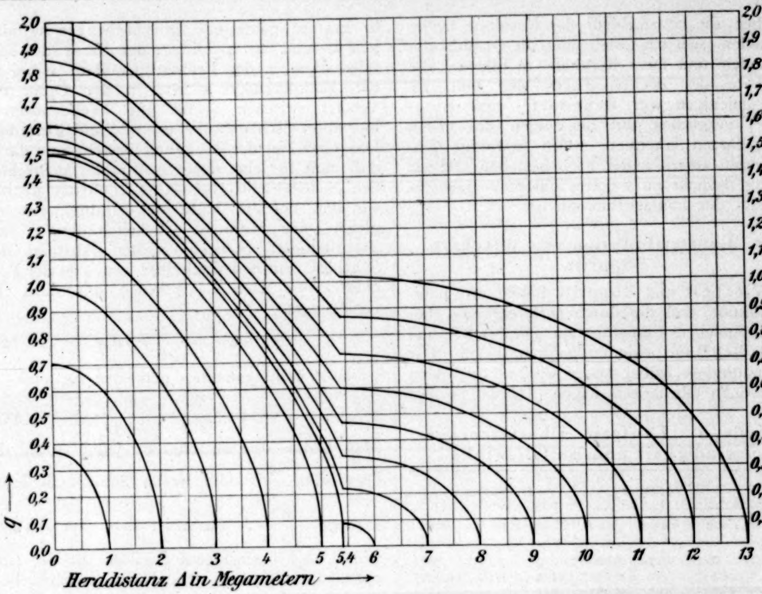


Fig. 1.

Will man den Scheitelradius r bis auf $\pm$ 1 km erhalten, so muß das Verhältnis $\frac{\bar{r}}{r}$, also auch der Integralwert bis auf ca. $\pm$ 0,02 Proz. richtig bestimmt werden, was schon ziemlich schwierig ist. Das Planimeter bleibt hier ganz außer Frage, dagegen wurde bei einem ausgewählten Strahl das Wägungsverfahren versucht. Dazu wurde $q(\Delta)$ auf Koordinatenpapier aufgezeichnet, sorgfältig ausgeschnitten und gewogen. Vorher war der ganze Bogen gewogen worden, so daß man sein spezifisches Flächengewicht (das ist das Gewicht pro Flächeneinheit) kannte. Zwei mit verschiedenen Papierbogen erhaltene Integralwerte differierten aber noch zu sehr, so daß das Verfahren verworfen wurde. Die Simpsonsche Regel wurde in der Rungeschen Modifikation benützt[1]). Dabei wird die Fläche in lauter Streifenpaare zerlegt, die dann zu integrieren sind. Ein solches Streifenpaar habe die Endordinaten q_1, q_3 und in der Mitte die Ordinate q_2. Die q_1, q_2, q_3 sind zahlenmäßig bekannt. Man macht dann die Annahme, daß das begrenzende Kurvenstück durch einen Parabelbogen angenähert ersetzt werden darf. Der dadurch begangene Fehler ist natürlich um so geringer, je schmaler man die Streifen wählt. Dabei ist es aber durchaus nicht nötig, daß die ganze Fläche in gleich breite Streifen zerlegt wird. Vielmehr wählt man da, wo die Randkurve sehr glatt verläuft, breitere Streifenpaare, während man bei komplizierter verlaufenden Partien möglichst enge Streifenpaare bildet. Es ist dabei Sache des Instinktes, die Einteilung so vorzunehmen, daß bei jedem Streifenpaar der mittlere Integrationsfehler ungefähr gleich groß wird. Die Auswertung der einzelnen Streifenpaare geschieht dann so: man denkt sich q_1, q_3 verlängert und legt zwischen q_1, q_3 die Sehne, in q_2 die Tangente an die Randkurve. Nennt man h den Abstand zwischen q_1, q_2 bzw. q_2, q_3, so ist der Inhalt des Tangentenvierecks

$$\mathfrak{T}_2 = q_2 \cdot 2h,$$

der Inhalt des Sehnenvierecks

$$\mathfrak{S} = (q_1 + q_3) \cdot \mathrm{h},$$

und der gesuchte Inhalt des durch den Parabelbogen begrenzten Streifens

$$J = \mathfrak{T} - \frac{1}{3}(\mathfrak{T} - \mathfrak{S}).$$

Das Gesamtintegral ist dann ΣJ. Dieses Ver-

1) Vgl. H. Arnold, Die Erdbewegung während des I. Vorläufers usw. Göttinger Diss. 1909; auch Beitr. z. Geoph. **10**, 269–316.

Tabelle 2. Integration für $\varDelta = 10$ Megameter.

$\varDelta$ Megameter	h	q_{2n}	q_{2n+1}	$q_{2n} + q_{2n+2}$	$\mathfrak{S}$	$\mathfrak{T}$	$\mathfrak{T} - \mathfrak{S}$	J
0		1,6759				3,2078		
1	1		1,6039	3,1020	3,1020	0,0353	0,1058	3,1725
2		1,4261				2,4024		
3	1		1,2012	2,4016	2,4016	0,0003	0,0008	2,4021
4		0,9755				0,8484		
4,5	0,5		0,8484	1,6868	0,8434	0,0017	0,0050	0,8467
5		0,7133				0,2616		
5,2	0,2		0,6539	1,3066	0,2613	0,0001	0,0003	0,2615
5,4		0,5953				0,3559		
5,7	0,3		0,5931	1,1836	0,3551	0,0003	0,0008	0,3556
6		0,5883				1,1020		
7	1		0,5510	1,0662	1,0662	0,0119	0,0358	1,0901
8		0,4779				0,7112		
9	1		0,3556	0,4779	0,4779	0,0778	0,2333	0,6334
10		0,0000						
								8,7619

fahren ist dann besonders bequem, wenn man h so wählt, daß die Multiplikation mit h und mit $2h$ im Kopf ausführbar ist; dann kann nämlich die ganze Integration leicht im Kopf gerechnet werden. In Tabelle 2 ist z. B. die Rechnung für den Strahl $\varDelta = 10$ Megameter mitgeteilt.

Die erste Spalte gibt $\varDelta$, die zweite gibt h, die dritte und vierte die geraden und ungeraden Ordinaten q, die fünfte die Summe je zweier gerader Ordinaten q, die sechste den Inhalt $\mathfrak{S}$ des Sehnenvierecks, die siebente enthält je zwei Werte: oben den Inhalt $\mathfrak{T}$ des Tangentenvierecks, unten $1/3$ der in der achten Spalte stehenden Differenz $\mathfrak{T} - \mathfrak{S}$; in der letzten steht der sich aus der siebenten Spalte ergebende Integralwert $J = \mathfrak{T} - \frac{1}{3}(\mathfrak{T} - \mathfrak{S})$. Die Summe der letzten Spalte gibt in dem mitgeteilten Beispiele als gesuchtes Gesamtintegral den Wert 8.762 ~~7,545~~ (die letzte Ziffer ist jetzt abgestoßen). Anfänglich wurden alle Strahlen der Fig. 1 nach dieser Methode integriert. Die Resultate differierten bei den Strahlen mit $\varDelta > 5{,}4$ Megameter nur sehr wenig von den Resultaten der früheren Rechnung[1]), während für $0 < \varDelta < 5{,}4$ Megameter sich ganz bedeutende Abweichungen zeigten. Die Ordinaten q waren nämlich für $\varDelta = 0, 1, 2, \ldots$ Megameter berechnet, nur im Bereich von $\varDelta = 5{,}4$ Megameter waren weitere Werte eingeschaltet worden. Die Kurven mit kleinem $\varDelta$ hatten also viel weniger berechnete Punkte als die mit großem $\varDelta$, woraus sich die Fehler bei den Strahlen mit kleinem $\varDelta$ leicht erklären. Man hätte natürlich bei den Strahlen mit kleinem $\varDelta$ hinreichend weitere Punkte einschalten können, um gute Integralwerte zu bekommen; es zeigte sich jedoch, daß dann der Arbeitsaufwand größer ist als bei der graphischen Integration. Für $\varDelta = 0, 1, \ldots 4, 5$ wurden deshalb die Kurven in großem Maßstabe auf Koordinatenpapier gezeichnet und so lange weitere Punkte eingeschaltet, bis über den Verlauf der Kurve kein Zweifel mehr blieb. Für eine Kurve genügten ca. 10—20 Punkte. Die graphische Integration ist äußerst einfach: man ersetzt dabei die Randkurve durch eine „Treppenkurve"[1]). Benutzt man Millimeterpapier, so wählt man am besten Streifen von 1 cm Breite und hat dann nur die mittleren Ordinaten abzulesen und zu addieren. Um ein Urteil über die erreichte Genauigkeit zu bekommen, wurde die Kurve für $\varDelta = 1$ Megameter zweimal gezeichnet und integriert. In beliebigem Maße ausgedrückt ergaben die beiden Integrationen 2857 bzw. 2858; der mittlere Fehler ist also nur $\pm 1/2$ oder ca. $\pm 0{,}02$ Proz., was der oben gestellten Anforderung entspricht.

Der weitere Gang der Rechnung an Hand der Gleichung

$$\log \text{nat} \frac{r}{r} = \frac{1}{20} \int q \, d\varDelta \tag{27}$$

ergibt sich von selbst, ebenso die Berechnung der Geschwindigkeit im Scheitel nach der Gleichung

$$v = \frac{r}{r} \cdot \mathfrak{V}_r \tag{29}$$

Tabelle 3 gibt die Resultate, und zwar in der ersten Spalte die Herddistanz $\varDelta$, in der zweiten die Integralwerte, in der dritten den Scheitelradius r, in der vierten die Scheiteltiefe S; zum Vergleich gibt die fünfte Spalte die entsprechenden Scheiteltiefen nach den Rechnungen von Zöppritz und Geiger, und die sechste die Differenzen zwischen der vierten und fünften Spalte; die letzte Spalte gibt die Wellengeschwindigkeiten v im Niveau r, also im Ab-

1) K. Zöppritz und L. Geiger, l. c.

1) H. Arnold, l. c.

Tabelle 3. Scheiteltiefe und Scheitelgeschwindigkeit.

Δ Megameter	J	r km	S_{1910} km	S_{Z-G} km	$S_{1910} - S_{Z-G}$ km	v km/sec
0	0,0000	6367	0	0	± 0	7,174
1	0,2858	6277	90	93	− 3	7,56
2	1,062	6038	329	330	− 1	8,55
3	2,169	5713	654	654	± 0	9,82
4	3,403	5371	996	998	− 2	11,05
5	4,856	4994	1373	1371	+ 2	12,31
5,4	5,460	4846	1521	1519	+ 2	12,77
6	5,510	4834	1533	1535	− 2	12,78
7	5,893	4742	1625	1629	− 4	12,78
8	6,548	4589	1778	1789	− 11	12,81
9	7,545	4366	2001	2004	− 3	12,79
10	8,762	4108	2259	2266	− 7	12,80
11	10,279	3808	2559	2568	− 9	12,78
12	12,139	3470	2897	2902	− 5	12,81
13	14,386	3101	3266	3274	− 8	12,79

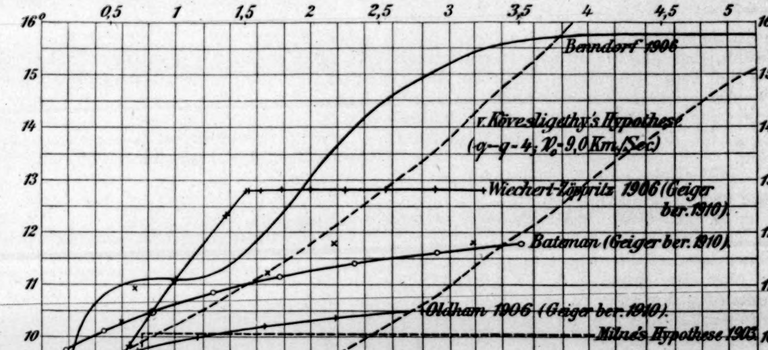


Fig. 2.

stande r vom Erdmittelpunkte. Fig. 2 zeigt, wie die Geschwindigkeit vom Oberflächenwert 7,174 km/sec fast genau linear wächst, um schließlich von 1521 km Tiefe an den nahezu konstanten Wert 12,77 km/sec anzunehmen. Dieser Verlauf der Geschwindigkeit in der Tiefe deckt sich so vollkommen mit dem früher gefundenen, daß keine Vergleichskurve gezeichnet werden konnte, weil der Strich breiter als die Differenz ist. Auf die anderen in Fig. 2 gezeichneten Kurven kommen wir unten zurück. Fig. 3 zeigt die Scheiteltiefe $S = \bar{r} - r$ als Funktion der Herddistanz Δ.

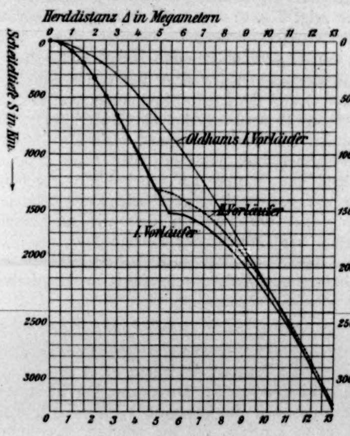


Fig. 3.

Man sieht den Knick bei $\Delta = 4{,}5$ Megameter, der genau dem Knick im Verlauf der Sinusfunktion entspricht. Diese beiden Knicke in Fig. 2 und 3 zeigen aufs deutlichste die Existenz eines Erdkernes in 1521 km Tiefe, der sich von dem äußeren Mantel absetzt. Im Mantel wächst die Geschwindigkeit gleichförmig, während sie im Kern wenigstens bis zu den beobachteten Tiefen konstant zu sein scheint. Die andere in Fig. 3 gezeichnete Kurve soll unten besprochen werden. Um die Vorstellung zu fixieren, zeigt Fig. 4 den Verlauf aller berechneten Strahlen im Erdinnern. Die Figur ist zwar nach den Resultaten der oben zitierten Rechnungen gezeichnet, doch haben wir ja gesehen, daß sie auch für unsere neuen Resultate unverändert gilt. Sie gibt außerdem den Verlauf der analog berechneten II. Vorläufer, der

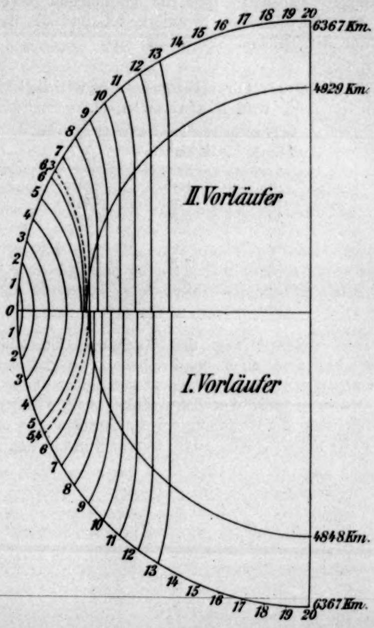


Fig. 4.

sich, wie man sieht, nur sehr wenig von demjenigen der I. Vorläufer unterscheidet. Zur Kontrolle wurde nach der oben mitgeteilten Methode der Kernradius auch aus den II. Vorläufern berechnet. Sowohl nach der neuen als nach der alten Methode ergab er sich zu 4929 km. Die aus den beiden Vorläufern berechneten Radien differieren also nur um ca. $1^1/_2$ Proz. und wir können annehmen, daß diese Differenz nicht durch Ungenauigkeiten der Methoden entstanden ist, sondern sich durch die Unsicherheit der zugrunde gelegten Laufzeitfunktion erklärt.

§ 8. Laufzeitfunktion von Oldham.

Oldham hat 1906 die Laufzeitfunktion der I. Vorläufer graphisch mitgeteilt[1]). Zunächst wurde daraus die Oberflächengeschwindigkeit $\mathfrak{V}$ als Funktion der Herddistanz Δ bestimmt, indem an Oldhams Kurve Tangenten gelegt wurden. Es zeigte sich dabei, daß das Verfahren bis auf ca. ± 1 Proz. genaue Werte zu liefern ver-

1) R. D. Oldham, l. c.

mag. Tabelle 4 gibt die gefundenen Werte der Oberflächengeschwindigkeit $\mathfrak{V}$ und die daraus hergeleiteten Werte für $\sin i$.

Tabelle 4. Oberflächengeschwindigkeit und Einfallswinkel.

Δ Grad	$\mathfrak{V}$ km/sec	$\sin i$
0	8,96	1,000
15	9,35	0,958
30	9,99	0,897
45	10,95	0,818
60	12,19	0,737
75	13,76	0,651
90	15,77	0,568
105	18,71	0,479

Der weitere Gang der Rechnung ist völlig analog dem oben beschriebenen, so daß wir uns auf wenige Bemerkungen beschränken können. Oldham mißt den Zentriwinkel Δ in Graden. Ich habe die Rechnung für die Strahlen $\Delta = 0^0$, 15^0, 30^0, ... 90^0, 105^0 durchgeführt. Fig. 5

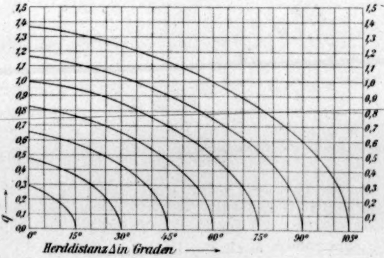


Fig. 5.

zeigt die betreffenden Funktionen $q(\Delta)$, die nach der graphischen Methode integriert wurden. Vergleicht man Fig. 5 mit Fig. 1, so fällt vor allem auf, daß bei Oldham keine Unstetigkeit im Bereich von $\Delta = 45^0$ auftritt, was ungefähr dem Knick der Wiechert-Zöppritzschen Werte bei $\Delta = 4{,}5$ Megameter entsprechen würde. Die weitere Rechnung gibt Tabelle 5, die ganz analog zur Tabelle 3 angeordnet ist. Man sieht, daß sich die Scheiteltiefen S in mittleren Tiefen ganz bedeutend von den Wiechert-Zöppritzschen unterscheiden, während sie merkwürdigerweise in großer Tiefe fast völlig zusammenfallen. Am deutlichsten sieht man dies in Fig. 3, die außerdem in der gestrichelten Kurve S der II. Vorläufer als Funktion der Herddistanz Δ

Tabelle 5. Scheiteltiefe und Scheitelgeschwindigkeit.

Δ Grad	$\mathfrak{J}$	r km	S km	S_{1910}	$S_{1910} - S$
0	0,00	6367	0	0	0
15	3,08	6259	108	238	+ 130
30	10,13	6019	348	765	+ 417
45	21,49	5650	717	1368	+ 651
60	36,07	5211	1156	1586	+ 430
75	54,15	4713	1654	1955	+ 301
90	75,61	4182	2185	2266	+ 81
105	104,0	3573	2794	2783	− 11

zeigt. Diese letztere Kurve ist nach den Resultaten der oben zitierten Arbeit gezeichnet. Den Verlauf der Geschwindigkeit $\mathfrak{V}$ als Funktion der Tiefe zeigt Fig. 2; man sieht, daß $\mathfrak{V}$ mit einem größeren Oberflächenwert beginnt, dann aber viel sanfter und ohne jeden Knick ansteigt.

In der oben zitierten Arbeit von Bateman ist auf Grund der Laufzeitfunktionen von Milne und von Benndorf die Geschwindigkeit als Funktion der Tiefe berechnet. Die Batemansche Formel muß natürlich einen ganz stetigen Verlauf von v mit der Scheiteltiefe ergeben. Wie die Kreuze in Fig. 2 zeigen, ist dies jedoch nicht der Fall, so daß wir annehmen müssen, daß Druck- oder Rechenfehler die Tabelle entstellt haben. Ich habe deshalb die Rechnung nochmals durchgeführt an Hand der folgenden Gleichungen:

$$T = 0{,}203 \cdot \Delta - 0{,}000557 \cdot \Delta^2$$
$$= m \cdot \Delta - n \cdot \Delta^2,$$

worin T die Laufzeit in Minuten, Δ die Herddistanz in Graden ist. Bateman hat in seiner Gleichung noch das konstante Glied − 0,4, was aber ohne Einfluß auf die weiteren Resultate ist. Die Oberflächengeschwindigkeit $\mathfrak{V}$ ist dann

$$\mathfrak{V} = \frac{1}{m - 2n \cdot \Delta}.$$

$\frac{\bar{r}}{r}$ liefert die Gleichung

$$\log\text{nat}\,\frac{\bar{r}}{r} = \frac{1}{360^0} \cdot \frac{m}{n} \cdot q - \sqrt{1 - \left(\frac{\mathfrak{V}_0}{\mathfrak{V}_r}\right)^2},$$

worin

$$\cos q = \frac{\mathfrak{V}_r}{\mathfrak{V}_0} \quad \text{und} \quad \mathfrak{V} = 9{,}11 \text{ km/sec ist.}$$

Fig. 2 zeigt die nach diesen Gleichungen berechneten Werte und zum Vergleich den Verlauf, wie ihn Benndorf qualitativ diskutiert hat und denjenigen, der sich aus der Hypothese von v. Kövesligethy[1]) für $\mathfrak{q} = -q = 4$ für die Oberflächengeschwindigkeiten 7,174 und 9,0 km/sec ergibt. Man sieht, daß selbst diejenigen Resultate, die auf Beobachtungen beruhen, noch ganz

1) v. Kövesligethy, l. c.

erschreckend differieren, und daß sorgfältige weitere Untersuchungen der grundlegenden Laufzeitfunktion auf Grund neuen Materials dringend erforderlich sind.

Göttingen, Geophysikalisches Institut, 1. März 1910.

(Eingegangen 8. März 1910.)

Nachtrag zu meinem Aufsatz: Über eine neue Form der Stoßerregung elektrischer Schwingungen[1]).

Von Max Wien.

In meiner Mitteilung habe ich es versäumt zu erwähnen, daß man die Löschröhre nicht nur, wie in Fig. 1 gezeichnet, außerhalb der Zuleitungen zur Funkenstrecke, sondern auch innerhalb derselben anbringen kann, so daß die Löschröhre einen Zusatz zur Funkenstrecke bildet. Der Unterschied der beiden Schaltungen in der Wirkung ist bei Benutzung eines gewöhnlichen Induktors oder einer Influenzmaschine als Stromquelle nur sehr gering, bei Benützung eines Resonanzinduktors ist jedoch die Schaltung außerhalb der Zuleitungen ungünstig, weil der Wechselstrom, welcher den Kondensator allmählich bis zur Entladung auflädt, durch die Löschröhre fließen muß, wodurch unnötiger Energieverlust und Erwärmung der Röhre verursacht wird.

1) Diese Zeitschr. 11, 76, 1910.

(Eingegangen 8. März 1910.)

Das Adriatische Meer und sein Einfluß auf das Klima seiner Küsten[1]).

Von Wilhelm Krebs.

Die in balneologischer Beziehung so überaus wertvolle Milde der Wintertemperaturen an der süddalmatinischen Küste ist von Herrn Grund hauptsächlich mit Hilfe der beobachteten Windverhältnisse auf einen Einfluß des tiefen Südmeeres der Adria zurückgeführt worden, im Gegensatz zu den erheblich kälteren Wintertemperaturen an den Gestaden der nördlichen Flachsee der Adria.

Die Wärme jener Tiefsee erinnert an das unmittelbar benachbarte, noch tiefere Meeresbecken des Ionischen Meeres. Dieser tiefste, bis nahezu vier Kilometer abgesenkte Kessel des Mittelmeeres darf als Warmwasserheizung großen Stiles angesehen werden. Denn, außer mehreren Seebeben in seinen Gewässern und vulkanischen und seismischen Erscheinungen an seinen Rändern, sind sogar in seinem Innern selbst feurig-vulkanische Ausbrüche beobachtet worden.

Nach Herrn Rudolphs erster Abhandlung im ersten Jahrgang der Gerlandschen Beiträge zur Geophysik „Über submarine Erdbeben und Eruptionen", S. 241 und 327, geschah dies am 17. August 1886 unter 35,9° nördlicher Breite, 18,7° östlicher Länge, also fast über jener tiefsten Stelle, und zehn Tage später, am 27. August 1886, 50 Seemeilen südwestlich von Kap Matapan. Die Schiffsberichte für jeden dieser Fälle erwähnten ausdrücklich Feuersäulen. Mit dem Ausbruch des 27. August traf ein zerstörendes Beben im östlichen Mittelmeergebiete, das vor allem auf der ionischen Insel Zante wütete, und ein Kabelbruch südlich dieser Insel zusammen.

Es erscheint bemerkenswert, daß das Erdbeben vom 15. Juli 1909, von dem besonders das eleische Ufer des Ionischen Meeres betroffen wurde, ebenfalls mit vulkanischen Ereignissen, wenn auch auf diesem Gestade selbst, verknüpft gewesen sein soll. Jedenfalls wurde es angekündigt und mit dem größeren sizilianischen Ereignis des 28. Dezember 1908 zeitlich verknüpft durch zwei Seebeben im Ionischen Meere.

Der Kreuzer „Victoria Luise" meldete das eine Seebeben unter Januar 3. 1909 von der kalabrischen Westseite, der Dampfer „Lemnos" das andere unter Januar 13. 1909 von der leukadischen Ostseite des Ionischen Meeres. Dieses bewährte also bis in die jüngste Zeit seinen vulkanischen Charakter.

Bei seiner Zugehörigkeit zu Europa selbst fordert es deshalb geradezu auch zu einer gründlichen Untersuchung seiner Temperaturverhältnisse heraus. Sicherlich würde diese Licht bringen auch in eine erst noch in den Jahrgängen 1908 und 1909 der Meteorologischen Zeitschrift viel umstrittene Frage: die der Tiefentemperaturen des östlichen Mittelmeeres.

Eine besonders klaffende Lücke besteht aber in Hinsicht solcher ozeanographischen Aufnahmen für die Adria selbst.

Herr Grund hat recht, Temperaturmessungen in diesem Meere schmerzlich zu vermissen. Er bestätigt für diesen Sonderfall eine Forderung, die von mir selbst schon im Märzheft 1907 der Deutschen Rundschau für Geographie und Statistik, am Schlusse eines

1) Diskussionsbemerkung zu diesem Vortrag des Herrn A. Grund-Halensee in der Sitzung der Naturforscherversammlung zu Salzburg vom 23. September 1909.

Beitrages über das Klima des Mittelmeeres erhoben ist: „Ausdehnung dieser Untersuchung über die bisher nicht berücksichtigten Glieder Adria und Ägäisches Meer."

Sie ging aus von einer Veröffentlichung der Deutschen Seewarte über Wind, Strom, Luft- und Wassertemperaturen auf den wichtigsten Dampferwegen des Mittelmeeres.

Dampferwege durchfurchen auch die Adria. Eine sehr naheliegende und bei geringem Aufwande an Kosten und Mühe schon in hohem Grade fruchtbringende Arbeit wäre es, wenigstens die beteiligten größeren Dampferlinien zu solchen Beobachtungen zu veranlassen, diese Beobachtungen zu sammeln und für ihre übersichtliche Bearbeitung Sorge zu tragen.

Großflottbek, Ende November 1909.

(Eingegangen 3. Dezember 1909.)

BESPRECHUNGEN.

G. Benischke, Die Transformatoren, ihre Wirkungsweise, Konstruktion, Prüfung und Berechnung. (Elektrotechnik in Einzeldarstellungen. 15. Heft.) 8. X u. 220 S. mit 218 Abbildungen im Text und auf 10 Tafeln. Braunschweig, Fr. Vieweg & Sohn. 1909. M. 9.—, gebunden M. 10.—

Das Werk, welches den 15. Band der „Elektrotechnik in Einzeldarstellungen" bildet, behandelt im ersten Teil die Theorie des Transformators. Der Verfasser erläutert zunächst den Vorgang der Induktion zwischen zwei Stromkreisen und das aus der Wechselwirkung beider Stromkreise resultierende Kraftliniensystem. Im Anschluß an den Begriff der Streuung werden dann die Selbstinduktionskoeffizienten und der Kupplungsfaktor eingeführt und die Differentialgleichungen der beiden Stromkreise aufgestellt. Das Zusammenwirken der verschiedenen Magnetfelder und der von ihnen erzeugten elektromotorischen Kräfte wird eingehend behandelt und der Einfluß der verschiedenen für den Transformator charakteristischen Größen, der Streuung, des Widerstandes usw., insbesondere auch der Art der Belastung und der sekundären Phasenverschiebung auf den Primärstromkreis wird durch Diagramme veranschaulicht. Ein besonderes Kapitel widmet der Verfasser der Theorie des Resonanztransformators, also des sekundär mit einem Kondensator belasteten Transformators, wie er für Zwecke der drahtlosen Telegraphie verwandt wird. Nachdem dann noch eingehend der Einfluß der Hysteresis und der Wirbelströme auf das Verhalten des Transformators und insbesondere die dadurch bedingten Verluste behandelt sind, bringt ein zweiter Abschnitt des Werkes konstruktive Gesichtspunkte und Einzelheiten mit Abbildungen von ausgeführten Transformatoren, hieran schließt sich die Theorie der Erwärmung und Abkühlung des Transformators und zwar sowohl für konstante als auch für aussetzende und veränderliche Belastung. Nach einem Abschnitt über die praktische Prüfung der Transformatoren bringt der Verfasser zum Schluß ein durchgeführtes Berechnungsbeispiel sowie Diagramme, welche nach ausgeführten Transformatorentypen Anhaltspunkte für die Berechnung und Konstruktion geben.

Das Werk ist klar und verständlich geschrieben und durch zahlreiche gute Abbildungen und Diagramme erläutert. G. Fuhrmann.

G. Kowalewski, Einführung in die Infinitesimalrechnung mit einer historischen Übersicht. (Aus Natur und Geisteswelt. 197. Bändchen.) 8. 126 S. mit 18 Figuren. Leipzig, B. G. Teubner. 1908. Gebunden M. 1.25

Im Vorwort heißt es: „Der Verfasser hofft, daß jeder Gebildete aus diesem kleinen Buch einen Begriff von dem Wesen der Infinitesimalrechnung gewinnen kann". Ich fürchte, daß diese Hoffnung zu optimistisch ist; denn die gebildeten Laienkreise pflegen vor der Mathematik eine mit Hochachtung gemischte Abneigung zu haben. Dafür aber wird das Büchlein den Studenten der Mathematik durch seine knappe klare Art wohl gefallen.

Cl. Schaefer.

Personalien.

(Die Herausgeber bitten die Herren Fachgenossen, der Redaktion von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Technischen Hochschule Braunschweig Dr. Karl Bergwitz für Physik.

Ernannt: Der Dozent der Mathematik am Christ's College Dr. E. W. Hobson zum Sadlerian Professor an der Universität Cambridge (England) als Nachfolger des in den Ruhestand getretenen Professor Dr. A. R. Forsyth.

Berufen: Der Privatdozent an der Universität Dr. Oskar Perron zum a.o. Professor der Mathematik an der Universität Tübingen.

Gestorben: Der ord. Professor der Chemie an der Universität Berlin Dr. Hans Landolt, der ord. Professor der Chemie, Mineralogie und Geologie an der Forstakademie in Hann. Münden Dr. Constantin Councler, der etatsmäßige Professor für Physik und Elektrotechnik an der Bergakademie Clausthal Dr. Ernst Gerland.

Gesuche.

Wir **suchen** für unser Laboratorium jungen Physiker als

zweiten Assistenten.

Anfangsgehalt 2400 M. Eintritt kann sofort erfolgen.

Neufeldt & Kuhnke,
Elektrotechnische Fabrik, **Kiel.**

Für die Redaktion verantwortlich Professor Dr. Friedrich Krüger in Danzig-Langfuhr. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.